

А.В.БОЛТЯН, И.А.ГОРОБЕЦ

Non multa, sed multum
(“Не много, но многое”, лат.)

**ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Донецк - 2004

ББК Ж1
Б79
УДК 621.001.89(075.8)

Болтян А.В., Горобец И.А.

Б79 Теория инженерных исследований: Учебное пособие (издание 2-е переработанное и дополненное).- Донецк, ДонНТУ, 2004. – 162 с., ил.

Изложены основы научного подхода к исследованиям в инженерном деле: разработка и решение математических моделей, подготовка к проведению экспериментальных исследований и испытаний, планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных. Особое внимание уделено выбору конструкции сенсорных устройств измерительной и управляющей аппаратуры. Приведены методы оптимизации исследуемых параметров объектов и процессов.

Для инженерно-технических работников, студентов, магистрантов, аспирантов, обучающихся по механическим, мехатронным и родственным специальностям.

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(письмо № 14/18.2-1160 от 25.07.2001 г.)

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. Христиановский В.В.,
д-р техн. наук, проф. Михайлов А.Н.

Навчальне видання

БОЛТЯН Андрій Володимирович, ГОРОБЕЦЬ Ігор Олексійович

ТЕОРІЯ ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
(російською мовою)

ISBN 966-7968-09-X

© Болтян А.В., Горобец И.А., 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. Модель. Моделирование. Классификация видов моделирования систем	6
2. Решение и анализ математических моделей.....	24
2.1. Аналитическое решение математических моделей.....	24
2.2. Численные методы решения математических моделей. Детерминированные модели Линейные модели. Решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений....	33
2.3. Численное дифференцирование и интегрирование.....	38
2.4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений ...	43
2.5. Численные методы математической физики.....	47
2.6. Моделирование случайных воздействий.....	54
3. Экспериментальные исследования работы машин.....	60
3.1. Матрица планирования ПФЭ 2^k и ее свойства.....	67
3.2. Дробные факторные планы.....	69
3.3. Планы второго порядка.....	73
3.4. Измерительная аппаратура для исследования машин.....	76
3.4.1. Методы и средства тензометрии.....	77
3.4.2. Тензометрические измерительные мосты постоянного тока	78
3.4.3. Схемы расположения тензорезисторов на детали	79
3.4.4. Материалы, используемые для тензорезисторов.....	80
3.4.5. Конструктивные особенности датчиков.....	81
3.4.6. Устройства для измерения перемещения механизмов.....	91
3.4.7. Пьезоэлектрические измерители параметров работы машин	97
3.4.8. Измерители параметров работы электропривода машин...	101
3.4.9. Преобразователи давления жидкостей и газов	104
3.4.10. Емкостные датчики.....	106
3.4.11. Фотоупругие датчики	108
3.4.12. Устройства регистрации информации.....	109
4. Обработка и анализ экспериментального материала	112
4.1. Цель обработки экспериментального материала	112
4.2. Задачи, решаемые при подготовке обработки результатов эксперимента.....	114
4.3. Анализ экспериментального материала	116
5 Основные понятия оптимизации моделей.....	132
5.1. Процедуры оптимизации модели. Критерий оптимизации. Методы линейного программирования. Симплекс метод.....	132
5.2. Метод Нилдера – Мида.....	138

5.3. Методы нелинейного программирования. Метод Фибоначчи.....	139
5.4. Поиск методом «золотого сечения».....	144
5.5. Аппроксимация кривыми.....	146
5.5.1. Квадратичная интерполяция.....	146
5.5.2 Кубическая интерполяция.....	147
5.6. Метод Хука-Дживса.....	148
5.7. Градиентные методы. Метод наискорейшего спуска.....	149
5.7.1. Квадратичные функции.....	150
5.7.2. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла.....	151
5.7.3. Метод Флетчера-Ривса.....	153
5.8. Штрафные функции.....	153
5.9. Метод SUMT Фиакко и Маккормика.....	155
5.10. Неопределенность целей. Методы построения обобщенных критериев. Оптимизация по Парето.....	155
ПОСЛЕСЛОВИЕ.....	160
Список использованных источников.....	161

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дальнейшее развитие техники, усложнение её конструкции, обусловленное и слиянием различных областей механики, электроники, электрических машин, использование микропроцессорной техники требуют от специалистов нового подхода к проектированию и исследованию работы машин. Поэтому современный специалист должен в совершенстве знать методы моделирования рабочих процессов механизмов и машин, научные подходы к исследованию их характеристик в совершенстве владеть средствами разработки компьютерных моделей в компьютерных средах Компас-3D, AutoCad, SolidWorks, ГеММа-3D, MatCad, Matlab и т.п.

Теория инженерных исследований включает пять основных направлений, по каждому из которых в настоящее время уже накоплен большой объем знаний, часть из которых нашла свое отражение в программных средствах обработки информации, построения моделей и их решения. К ним относятся:

Математическое *моделирование*, позволяющее на основе принятых допущений и ограничений, а также допускаемой погрешности заместить реальный объект его аналогом – моделью.

Планирование эксперимента, представляющее совокупность математических процедур, которые позволяют поставить и провести экспериментальные исследования с минимальными затратами.

Статистическая *обработка экспериментальных данных*, позволяющая установить характеристики исследуемых процессов с заданным уровнем погрешности.

Выбор *сенсорных устройств* измерительных систем, позволяющий определить их тип, конструкцию и материал с целью минимизации погрешности измерений.

Оптимизация моделей, позволяющая определять наилучшие при заданных условиях значения её параметров.

Авторы настоящей работы не ставили перед собой цель дать всеобъемлющую характеристику каждого из направлений. Представленное видение данного направления является акцентом на важнейших моментах теории инженерного эксперимента и представляет практический интерес для специалистов-механиков, занимающихся проектированием и исследованиями (испытаниями) машин и механизмов.

1 Модель. Моделирование. Классификация видов моделирования систем

Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется **объектом** (лат. *objectum* – предмет). Объекты взаимодействуют между собой и внешней средой. Логические схемы, построенные на определенных предсказаниях (гипотезы) или суждениях о каком-либо сходстве двух объектов (анalogии), которые упрощают рассуждения и логические построения или позволяют проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами, **модель** (лат. *modulus* – мера) – это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала. Отсюда следует еще один вывод: модель лишь приближенно отражает рассматриваемые свойства моделируемого объекта, и степень этого приближения должна согласоваться с точностью входной информацией о явлении.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших (с точки зрения исследователя) свойства объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется **моделированием**. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Теория замещения одних объектов другими (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется **теорией моделирования**. Как уже подчеркивалось, модель должна быть надежной и доброкачественной. Такими же свойствами должна обладать и исходная информация, необходимая для построения модели [1,2].

В основе моделирования лежит **теория подобия**, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. Поэтому в качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем [3]. В зависимости от характера изучаемых процессов в системе все **виды моделирования** могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статистические и

динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные, рис. 1.1.

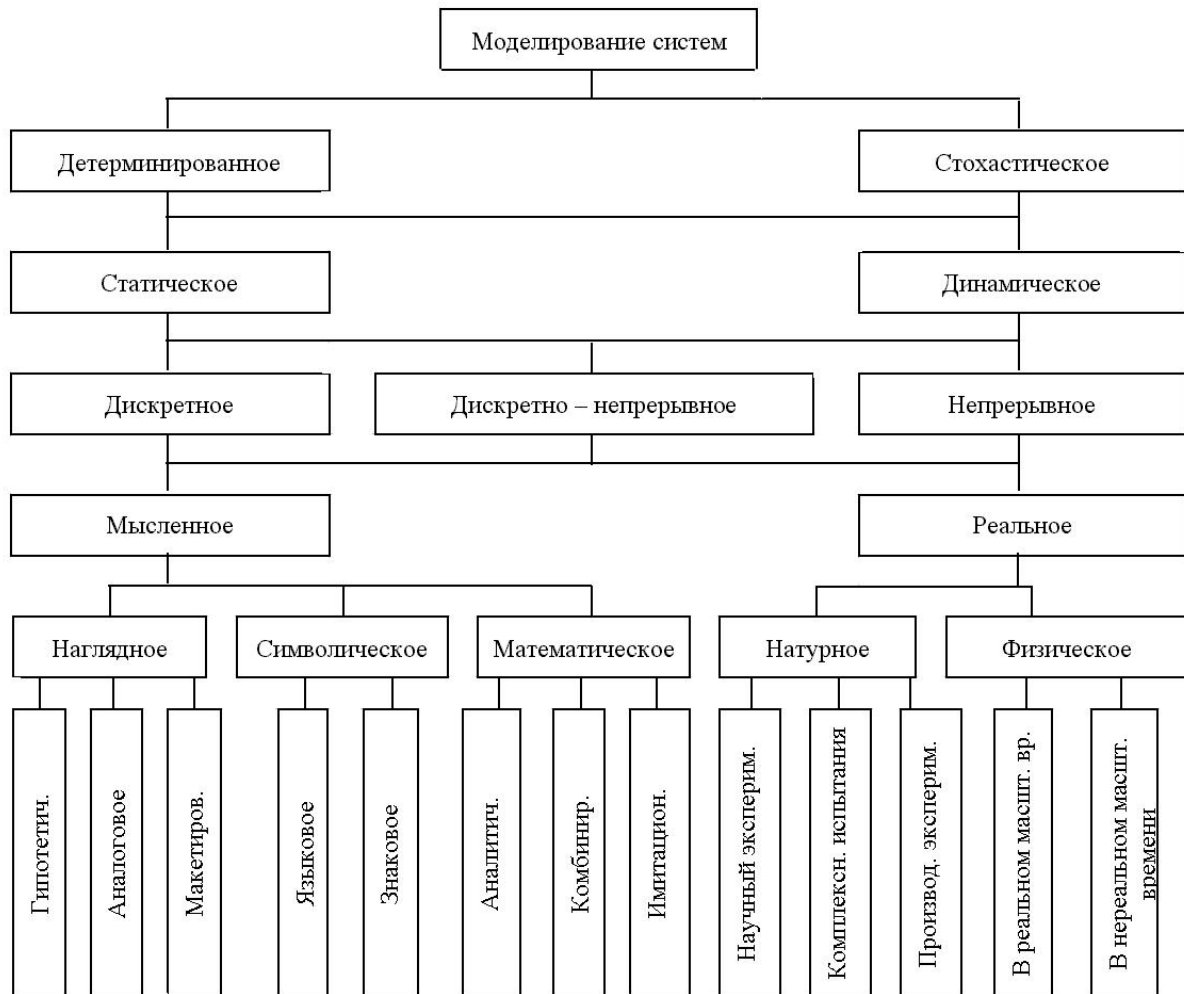


Рис.1.1 - Классификация видов моделирования систем.

Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых вся исходная информация является полностью определенной. При **стохастическом** моделировании исходная информация содержит элементы неопределенности или параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками.

Статистическое моделирование служит для описания объекта в фиксированный момент времени. **Динамическое** моделирование служит для отражения поведения объекта во времени [4].

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными. **Непрерывное** моделирование отражает непрерывные процессы в системах. **Дискретно-непрерывное** моделирование применяется для систем, в которых хотя и выделяют как дискретные, так и непрерывные процессы.

В зависимости от формы представления объекта или системы можно выделить **мысленное** и **реальное** моделирование, см. рис. 1.1.

На базе **мысленного моделирования** могут быть проанализированы ситуации, которые не поддаются физическому эксперименту. Это моделирование может быть реализовано в виде **наглядного, символического и математического**. При **наглядном моделировании** используются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. Эти модели могут быть построены на гипотезах (гипотетическое моделирование), аналогах (аналоговое) или макетах (макетирование). В последнем случае также используются аналоги, но базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте.

Знаковое моделирование базируется на условном обозначении отдельных понятий и определенных операций между этими понятиями, например, какого-нибудь объекта символами теории множеств. В основе **языкового моделирования** лежит некоторый тезаурус, то есть словарь, очищенный от неоднозначности. Эти два подвида относятся к **символическому моделированию**, которое представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Математическое моделирование – процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследования этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. **Математическая модель** – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики, системы математических соотношений, описывающих изучаемый процесс. Вид математической модели, как уже было сказано, зависит как от природы реального объекта, так и от задач исследования объекта. Математическое моделирование подразделяется на **аналитическое, имитационное и комбинированное**. При **аналитическом** моделировании функционирование элементов систем записывается в виде некоторых функциональных соотношений: алгебраических, дифференциальных, интегральных и др. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами: 1) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости искомых характеристик; 2) численным, когда нет решения исходного уравнения в общем виде и получают числовые результаты при конкретных начальных данных. Этот метод особенно эффективен при

использовании ЭВМ; 3) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения, например, оценить устойчивость решения. Следует отметить, что получить явное решение для аналитических моделей возможно для сравнительно простых систем. Поэтому для сложных систем идут на существенное упрощение их первоначальных моделей, чтобы на упрощенной модели изучить хотя бы общие свойства системы.

Математические модели получили наибольшее распространение. Исходной информацией для построения такой модели служат данные о назначении и условиях работы исследуемой (проектируемой) системы. Эта информация определяет основную цель моделирования системы и позволяет сформулировать требования к разрабатываемой математической модели. Уровень абстрагирования определяет выбор математической схемы. Под математической схемой понимается метод мышления, средство формулирования понятий, что является важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса её функционирования в виде некоторой математической модели. При построении математической модели необходимо решить вопрос о её полноте, т. е. выбрать границу “система-среда”.

Модель объекта моделирования, т. е. системы, можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

- совокупность входных воздействий на систему $x_i \in X, i = \overline{1, n_x}$;
- совокупность воздействий внешней среды $V_\ell \in U, \ell = \overline{1, n_u}$
- совокупность внутренних (собственных) параметров $h_k \in H$,
- системы совокупность выходных характеристик системы $y_j \in Y, j = \overline{1, n_y}$.

При моделировании системы воздействия внешней среды внутренние параметры её являются независимыми (экзогенными) переменными. Выходные характеристики системы являются зависимыми (эндогенными) переменными.

Процесс функционирования системы описывается во времени оператором F_s , который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные, в соответствии с соотношением вида

$$\bar{y}(\tau) = F(\bar{x}, \bar{u}, \bar{h}, \tau).$$

Это соотношение является математическим описанием поведения объекта моделирования во времени, т. е. отражает его динамические

свойства. Модели такого вида называются динамическими. Для статической модели математическая модель в векторной форме может быть записана как

$$\vec{y} = f(\vec{x}, \vec{u}, \vec{h}(\tau))$$

Указанные соотношения могут быть получены через свойства системы в конкретные моменты времени, называемые состояниями.

Таким образом, под математической моделью объекта понимают конечное подмножество переменных $\{\vec{x}(\tau), \vec{u}(\tau), \vec{h}(\tau)\}$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками.

Приведенные математические соотношения представляют собой математические схемы общего вида. Однако в практике моделирования механических систем на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать типовые математические схемы: дифференциальные уравнения, конечные автоматы и др.

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы (схемы).

I. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы).

Эти схемы отражают динамику изучаемой системы, т. е. её поведение во времени. Поэтому они имеют такое название (англ. *dynamic*). Такие модели могут быть описаны дифференциальными уравнениями (см. далее в этой главе). Если в дифференциальном уравнении неизвестные - функции от многих переменных, то уравнения называются уравнениями в частных производных, в противном случае при рассмотрении функций только одной независимой переменной, уравнения называются обыкновенными дифференциальными.

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время.

II. Дискретно -детерминированные модели (F-схема).

Особенности функционирования таких моделей рассматриваются на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. Теория автоматов - раздел теоретической кибернетики, в котором изучаются математические модели - автоматы. Система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени. Автоматы представляются в виде “черного ящика“, на который подаются входные сигналы и снимаются выходные и

который может иметь некоторые внутренние состояния. У конечного автомата множество внутренних состояний и входных сигналов (а следовательно, выходных) являются конечными множествами. Абстрактно конечный автомат (англ. *finite automaton*) можно представить как математическую F-схему, характеризующуюся 5-ю элементами: конечным множеством входных сигналов; конечным множеством выходных сигналов; конечным множеством внутренних состояний; функцией переходов; функцией выходов.

III. Дискретно-стохастические модели (P-схемы).

Данная схема представляет собой вероятностный автомат (англ. *probabilistic automaton*), который можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нём и может быть описано статистически. Рассмотрим P-схему на примере рассмотрения структурных состояний самонастраивающейся многоструктурной системы адаптивного управления фрезерным станком с ЧПУ. Для реализации переключения структурных состояний необходимо знать текущее значение снимаемого припуска, которое, как правило, неизвестно. Поэтому применяется теория автоматов. Эти состояния можно представить в виде конечного автомата с памятью, граф которого приведен на рис. 1.2.

В I состоянии можно попасть только из II при условии $n = n_{min}$.

1. на базе объектного проектирования процесса обработки.

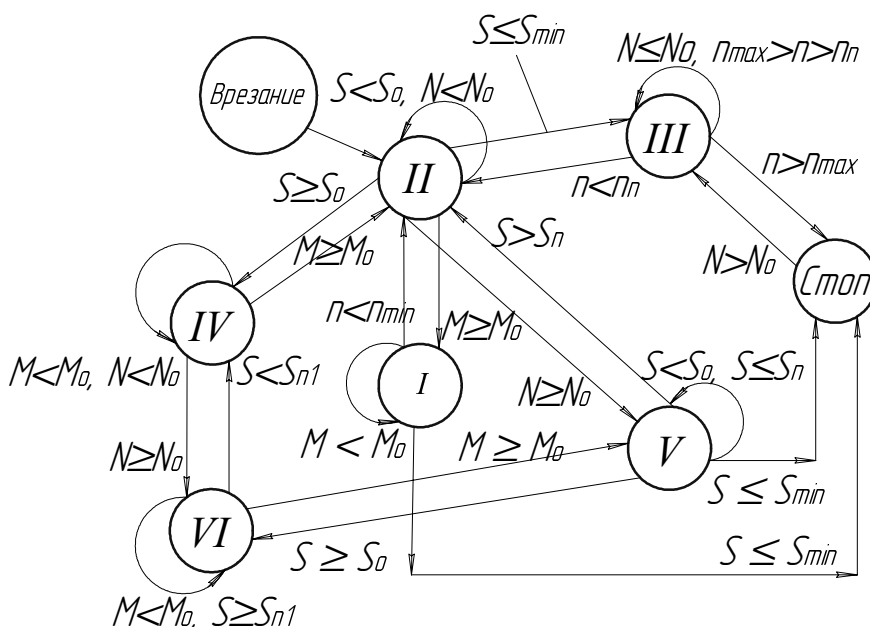


Рис. 1.2 - Граф конечного автомата с памятью:

M- крутящий момент; N- мощность привода; S- подача фрезы; T- стойкость фрезы; n- частота вращения шпинделя; индексы «min», «0»- соответствуют минимально возможным и оптимальным значениям

В I состоянии выполняется условие $M < M_0$. Если оно нарушается, происходит переход во II состояние. При выполнении условия: $S \leq S_{\min}$ необходимо уменьшить снимаемый припуск (глубину резания).

Во II состоянии возможен переход из I, III, IV или V состояний. Во II состоянии выполняются условия $S < S_0$ и $N < N_0$. Если нарушается I условие, происходит переход в IV состояние. Если нарушается второе условие - переход в V состояние. Если эти условия не нарушаются, анализируются ограничения по n и S . При $S \leq S_{\min}$ переход в III состояние, а при $n < n_{\min}$ - в I состояние.

Переход в III состояние возможен только из II. В III состоянии выполняются условия $N \leq N_0$ и $n_{\max} > n \geq n_n$ (n_n - частота вращения шпинделя в момент перехода из II состояния в III). При $N > N_0$ или $n \geq n_{\max}$, надо уменьшить глубину резания. Если $n < n_n$, происходит переход во II состояние.

Переход в IV состояние возможен только из II или VI состояний. В IV состоянии выполняются условия $M < M_0$, $N < N_0$. При нарушении I условия – переход во II состояние, а при нарушении II–IV в состояние.

Переход в V состояние возможен только из II или VI состояний. В V состоянии выполняются условия $S < S_0$, $T \leq T_0$. Второе условие заменено на $S \leq S_n$ (S_n -подача в момент перехода из II состояния в V). При ограничении $S \leq S_{\min}$ надо уменьшить глубину резания или прекратить обработку. При выполнении условия $S > S_n$ - переход во II состояние, а при $S \geq S_0$ - в VI состояние .

Переход в VI состояние возможен только из IV и V. В VI состоянии выполняются условия $M < M_0$, $T > T_0$. Из них второе условие заменено на $S \geq S_{nI}$, где S_{nI} - подача в момент перехода из IV состояния в VI. При ограничении условия $S < S_{nI}$ осуществляется переход в IV состояние, а при выполнении условия $M \geq M_0$ происходит переход в V состояние.

В начальный момент времени после отработки процедуры "врезание" всегда включается II структурное состояние как наиболее вероятное.

4. Непрерывно-стохастические модели (Q- схемы).

Такой класс моделей применяется при представлении возмущающей силы в виде случайной функции. Также такие модели используются в качестве типовых математических схем массового обслуживания (англ. queuing system), которые и называются поэтому Q –системами. В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования производственных, технических и других систем:

потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха и т. д. При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т.е. стохастический характер процесса их функционирования.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания заявок и собственно обслуживание заявки. Это можно изобразить в виде некоторого i -го прибора обслуживания Π_i , рис. 1.3, состоящего из накопителя заявок H_i , в котором может одновременно находиться $\ell_i = \overline{0, L_i^H}$ заявок, где L_i^H - емкость i -го накопителя, и канала обслуживания заявок (или просто канала), K_i . На каждый элемент прибора обслуживания Π_i поступают потоки событий: в накопитель H_i поток ω_i , на канал K_i - поток обслуживаний U_i .

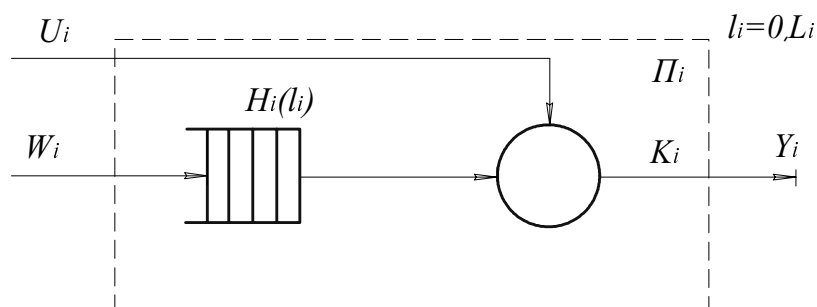


Рис. 1.3 - Схема прибора обслуживания заявок

5. Обобщенные модели (А – схемы).

Данный подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем, т.е. по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии агрегативной системы (англ. aggregate system), представляющей собой формальную систему общего вида, на число подсистем, сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие.

При **имитационном** моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Это позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. С помощью имитационного моделирования можно решать более сложные задачи, чем при использовании

аналитического моделирования. Наиболее широко в имитационном моделировании используется метод статистического моделирования, представляющий собой численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила название метода Монте-Карло). Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования.

При **реальном** моделировании используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте, либо на его части. При **натурном** моделировании исследования проводятся на реальном объекте с последующей обработкой результатов исследований. Такие разновидности этого моделирования, как производственный эксперимент и комплексные испытания, обладают высокой степенью достоверности. Научный эксперимент характеризуется широким использованием средств автоматизации его поведения, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства исследователя в процессе проведения эксперимента. В настоящее время сформировалось новое научное направление – автоматизация научных экспериментов.

Другим видом реального моделирования является **физическое**, которое отличается от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. Поэтому под физическим моделированием понимается прием изучения какого-либо объекта на физической модели, основанной на критериях подобия. Физическое моделирование может проводиться в реальном и нереальном (псевдореальном) масштабах времени.

Особое место в моделировании занимает **кибернетическое** моделирование [4,5], в котором отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае реальный объект рассматривается как “**черный ящик**”, имеющий ряд входов и выходов, и моделируются некоторые связи между выходами и входами, рис. 1.4.

На такой объект воздействуют 4 группы факторов, которые и определяют его состояние:

1) Группа $X=(x_1, x_2... x_k)$, в которую входят контролируемые факторы. Такие факторы допускают целенаправленное изменение в ходе исследования.

2) Группа $U=(u_1, u_2... u_m)$, в которую входят контролируемые, но не допускающие изменения при эксперименте факторы (например, условия окружающей среды).

3) Группа $Z=(z_1, z_2... z_n)$ – неконтролируемые и неуправляемые факторы.

4) Группа $Y=(y_1, y_2... y_N)$ – выходные переменные – отклики.

Математическая модель объекта:

$$Y = f(x_i, u_j... z_n),$$

где x_i – совокупность значений контролируемых и управляемых параметров ($i=\overline{1, k}$);

u_j – совокупность значений контролируемых, но неуправляемых параметров ($j=\overline{1, m}$);

z_n – совокупность неконтролируемых и неуправляемых факторов, ($v=\overline{1, n}$).

Однако, практически при построении модели такие соотношения получить невозможно, поэтому приходится вводить ограничения. Например:

$$x_i = var;$$

$$u_j = const;$$

$$z_n = const.$$

Тогда

$$y = f(x_1, x_2... x_k), \quad i=\overline{1, k},$$

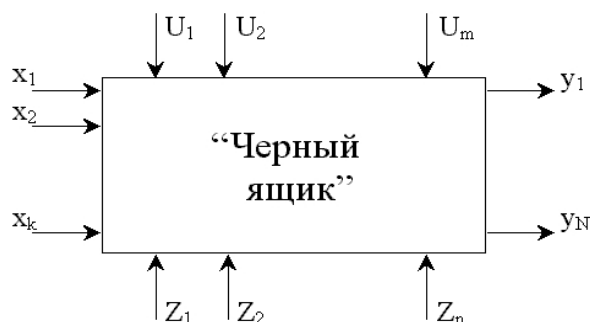


Рис.1.4 - Модель “черный ящик”

где x_i – факторы;

$x_1 \dots x_n$ – факторное пространство.

Геометрическое изображение функции отклика Y в факторном пространстве – поверхность отклика.

В зависимости от подхода исследователя, решаемых им задач, один и тот же объект или явление можно описывать различными видами моделей. Рассмотрим это на примере модели динамической системы токарно-винторезного станка, используемой при исследовании вибраций при резании. В большинстве случаев вибрации приводят к неустойчивости процесса резания. Поэтому режимы обработки следует назначать такими, чтобы избежать неустойчивого резания (в противном случае стойкость инструмента, а следовательно, и штучная производительность обработки, будут снижаться). Рассмотрим вынужденные колебания резца. Представим суппортную часть токарно-винторезного станка в виде идеально упругого тела. Тогда для такого тела можно сформулировать следующее свойство: если направление силы резания проходит через суппортную часть станка, то конец вектора полного смещения вершины резца лежит на

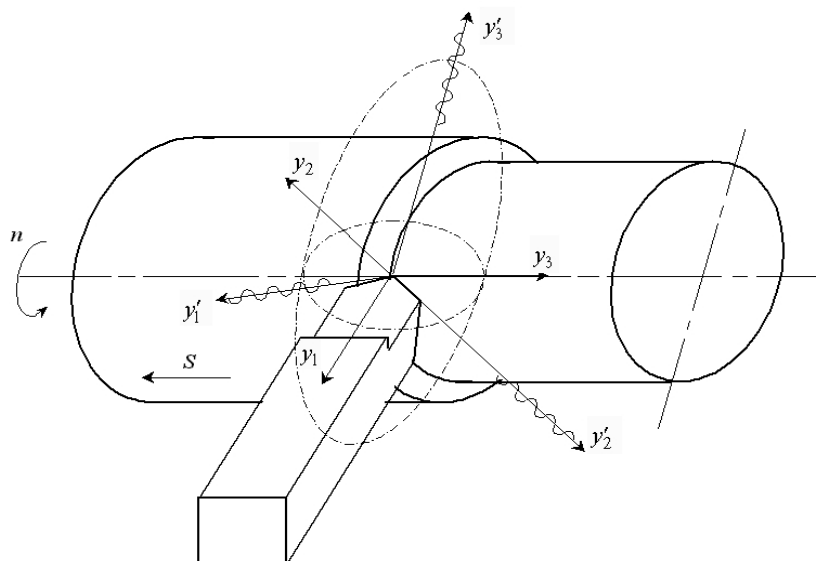


Рис.1.5 - Схема упругой колебательной системы токарного станка

эллипсоиде смещений. Следовательно, для вершины резца можно указать такие три взаимно перпендикулярных направления, в которых векторы приложенных сил и соответствующих смещений являются коллинеарными. Эти направления называются главными осями жесткости в вершине резца, OY_1' , OY_2' , OY_3' , рис. 1.5.

Ограничиваясь тремя степенями свободы, поведение динамической модели можно описать следующими дифференциальными уравнениями движения:

$$m_1 \ddot{y}_i + \beta_i \dot{y}_i + \sum_{j=1}^3 y_j \sum_{m=1}^3 C_m \delta_{mi} \delta_{mj} = P \eta_i$$

где m_i – приведенные (например, по формуле Рэлея) к вершине резца инерционные коэффициенты суппортной части металлорежущего станка;

C_m – приведенные коэффициенты жесткости в направлении главных осей жесткости;

$\delta_{mi(j)}$ – элементы матрицы перехода от системы OY'_1, OY'_2, OY'_3 , связанной с главными осями жесткости, к системе координат OY_1, OY_2, OY_3 ;

β_i – коэффициенты внешнего вязкого трения;

η_i – тригонометрические функции углов, связывающих силу трения P с ее проекциями P_i на оси Y_i ;

P – сила резания.

Коэффициенты жесткости определяются экспериментально, а затем пересчитываются из исходной системы координат в систему координат, оси которой являются главными осями жесткости. Значения коэффициентов внешнего вязкого трения можно определять по записям (осциллограммам) собственных колебаний системы в направлении главных осей жесткости.

Возмущающая сила в этом уравнении будет состоять из суммы силы резания на передней поверхности резца и силы трения на задней его поверхности. Изменение этих сил как функций времени обусловлено неравномерностью припуска (т.е. слоя материала, удаляемого с поверхности заготовки), а также прерывистым характером самого процесса резания при некоторых видах работы: фрезеровании, долблении, строгании и др. Поскольку в образовании рельефа поверхности заготовки на заготовительных операциях участвуют много факторов и степень их влияния – различна, то общее уравнение реальной обрабатываемой поверхности в поперечном сечении целесообразно представить в виде ряда Фурье [7]:

$$y(\rho) = \rho(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\rho + b_n \sin n\rho)$$

где $\rho(\tau)$ – текущий действительный радиус заготовки как функция времени (τ); a_n, b_n – числовые коэффициенты, характеризующие неровность поверхностей, пропорциональные углу поворота заготовки и ее длине; n – порядок неровности на рассматриваемом сечении профиля заготовки от какого-либо фактора, расположенный по степени убывания влияния каждого фактора на изменение глубины

резания резца Δt (или припуска Z), например, $n = 1$ в случае наличия общего смещения заготовки с оси вращения шпинделя станка; $n = 2$, если поверхность заготовки имеет овальность и т.д.; ρ – радиус действительной поверхности заготовки.

Принимая изменение силы резания пропорциональным изменению величины припуска, можно выражение этой силы представить также в виде разложения в ряд Фурье:

$$P(\tau) = C_p \left[0,5a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau + b \sin n\tau \right],$$

где C_p – силовой коэффициент, учитывающий различные факторы процесса резания; $0,5a_0$ – постоянная составляющая силы резания.

Предполагая, что возникновение вынужденных колебаний в зоне резания в основном обусловлено теми явлениями, которые оказывают наибольшее влияние на изменение величины припуска, и ограничиваясь первым членом ряда, указанное выше выражение можно представить в виде:

$$P(\tau) = C_p [0,5a_0 + \Delta P(\tau) \cos(\lambda\tau + \varphi)],$$

где $\Delta P(\tau)$ – амплитуда силы резания; λ – частота изменения этой силы; φ – сдвиг фазы.

Исключив из рассмотрения постоянную составляющую силы резания, которая не оказывает влияния на частоту колебаний, а также положив $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и разделив все слагаемые исходного дифференциального уравнения на m , получим стандартный вид дифференциального уравнения, которое будет описывать детерминированную динамическую систему:

$$\ddot{y} + 2n_\delta \dot{y} + \omega^2 y = p \sin \lambda\tau,$$

где
$$2n_\delta = \frac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m}; \quad p = \Delta P \cdot \frac{C_p}{m}.$$

Рассмотрим более подробно полученное дифференциальное уравнение движения вершины резца вдоль одной из главных осей жесткости.

1. При постоянных значениях n и ω получаем линейное дифференциальное уравнение, описывающее линейную детерминированную динамическую систему.

2. Если n и ω будут переменными, как функции y или \dot{y} – уравнение будет нелинейным, а соответствующая ему динамическая система будет детерминированной нелинейной.

2.1. При переменном n и постоянном значении частоты собственных колебаний системы ω получаем автоколебательную систему, причем n является функцией \dot{y} .

2.2. При постоянном значении коэффициента n , характеризующего рассеяние энергии системой, и переменной ω получаем параметрическую систему.

Однако, как показывают осциллограммы силы резания резцом заготовок, имеющих твердую корку, например, поковок, силы резания как функции времени являются скорее случайными, чем периодическими, рис. 1.6.

Так как на амплитуду силы резания в формуле для $P(\tau)$ будет оказывать влияние как изменение припуска, так и изменение поверхностной твердости заготовки в процессе резания, то

$$\Delta P = C_p S^{\alpha} t^{\gamma} HB^{H-1} V^m (\rho HB \Delta t + nt \Delta HB),$$

где α, γ, H, m – показатели степени; HB – заданная твердость поверхности заготовки; S – подача инструмента; t – глубина резания; v – скорость резания; $\Delta HB, \Delta t$ – изменение соответственно твердости поверхности и глубины резания (припуска – при работе на настроенном на размер оборудовании). Изменение твердости поверхности, как показали исследования Киевского политехнического института, носят случайный характер и не превышают 8...10% средней твердости заготовки. Плотность распределения вероятностей твердости близка к нормальному закону. Однако незначительный разброс значений твердости позволяет в первом приближении этот фактор не учитывать при решении рассматриваемой задачи.

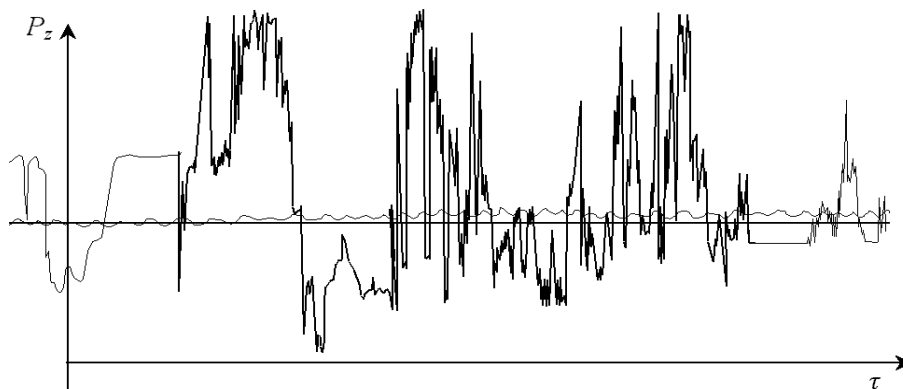


Рис.1.6 - Фрагмент записи усилия резания

Исследования, проведенные кафедрой “Технология машиностроения” Донецкого государственного технического университета позволили установить, что величина общего припуска заготовок, полученных свободной ковкой, также является случайной, плотность вероятностей которой распределяется по закону Вейбулла [8,9], рис.1.7:

– для диаметра d_1

$$f_1 = \begin{cases} 0,63 \left(\frac{z-13,2}{1,96} \right)^{0,23} \cdot \exp \left[- \frac{z-13,2}{1,96} \right]^{1,23}, & \text{при } z \geq 13,2 \text{ мм.} \\ 0, & \text{при } z < 13,2 \text{ мм;} \end{cases}$$

– для диаметра d_2

$$f_1 = \begin{cases} 0,88 \left(\frac{z-9,01}{1,48} \right)^{0,3} \cdot \exp \left[- \frac{z-9,01}{1,48} \right]^{1,3}, & \text{при } z \geq 9,01 \text{ мм.} \\ 0, & \text{при } z < 9,01 \text{ мм,} \end{cases}$$

где z – припуск на диаметр.

Таким образом, и сила резания также будет случайной функцией, а стандартный вид дифференциального уравнения в этом случае будет описывать динамическую систему со случайным возмущением.

Наиболее общий случай возникает, когда и параметры n , ω , и возмущающая сила будут случайными функциями, когда мы имеем дело со стохастической динамической системой. Отсюда следует, что детерминированные модели являются частным случаем моделей стохастических.

Из сказанного выше можно сделать один важный вывод, что в зависимости от решаемых задач один и тот же объект или одно и то

же явление могут быть описаны различными видами моделей. И,

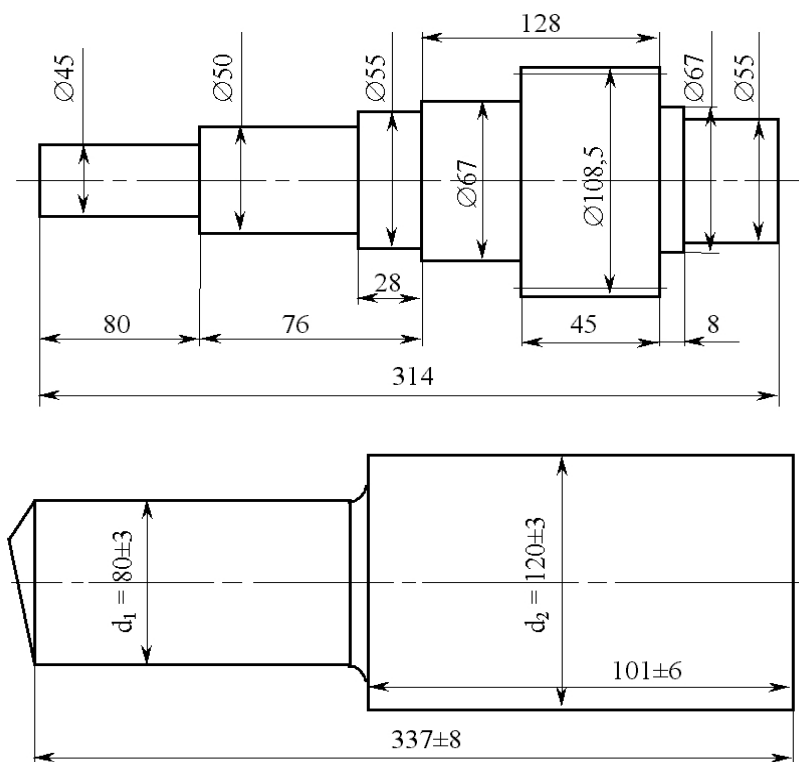


Рис.1.7 – Вид детали и заготовки с припусками на поковку

наоборот, различные объекты или явления могут быть описаны одним и тем же видом модели.

Например, модель перемещения суппорта токарно-винторезного станка, рис.1.8 и 1.9, и модель системы перемещения горного (очистного) комбайна с гибким (цепным) тяговым органом, рис.1.10 и 1.11, можно представить в виде дифференциального управления второго порядка с правой частью, представляющей собой внешнее возмущение:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = F(t),$$

где m – масса движущейся системы или ее части;

x, \dot{x}, \ddot{x} – соответственно перемещение, скорость и ускорение системы или ее части;

β – величина, характеризующая рассеяние энергии системой или диссипативная характеристика системы;

C – коэффициент жесткости системы или ее части;

$F(t)$ – внешнее возмущение.

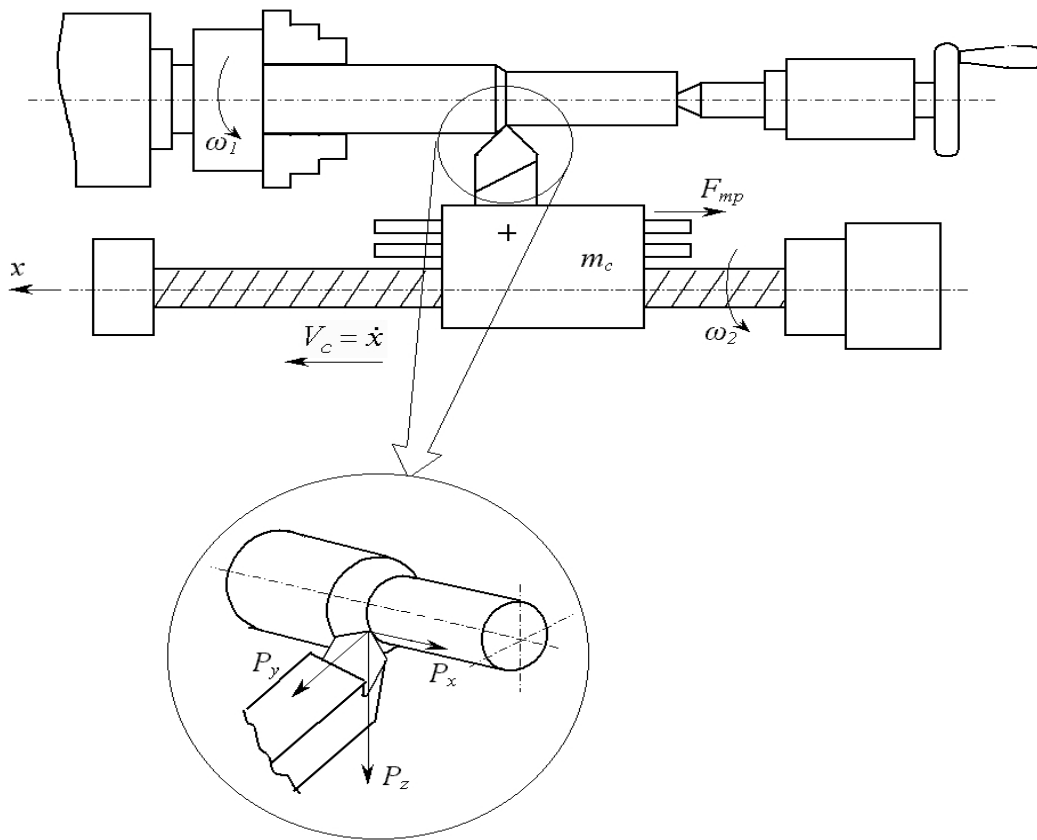


Рис.1.8 - Конструктивная схема токарно-винторезного станка

Рассмотрим, что представляет каждое из слагаемых этого дифференциального уравнения:

$m\ddot{x}$ – сила, обусловленная ускорением системы или ее части;

$\beta\dot{x}$ – сила, обусловленная скоростью системы или ее части;

cx – сила, обусловленная упругими свойствами системы или ее части, или в стандартном виде:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = f(t). \quad (1.1)$$

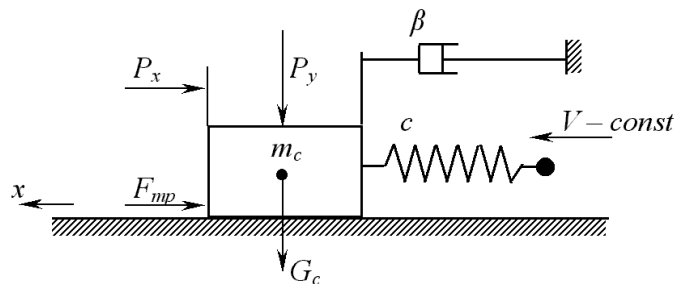


Рис.1.9 - Расчетная схема для составления математической модели перемещения суппорта токарно-винторезного станка

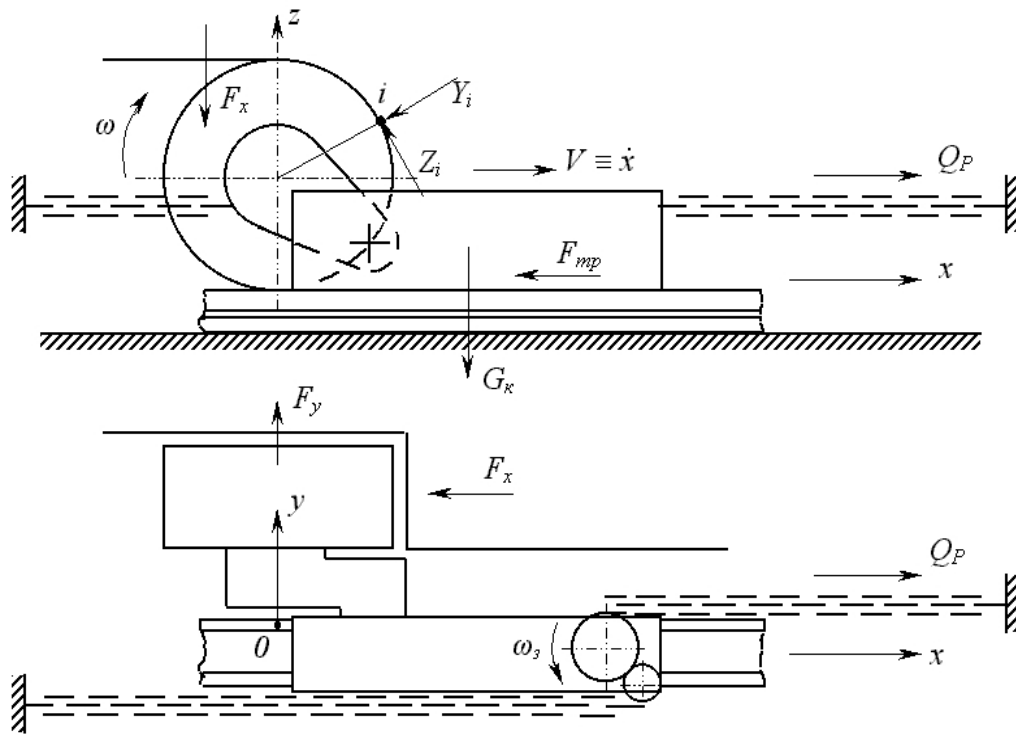


Рис.1.10 – Схема конструкции очистного комбайна

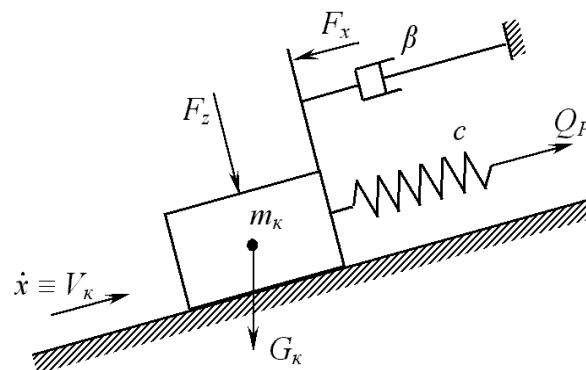


Рис.1.11 - Расчетная схема для составления математической модели системы перемещения очистного комбайна с гибким тяговым органом

2 Решение и анализ математических моделей

Наличие моделей, точнее, математических моделей систем, отдельных элементов или процессов, характера внешнего возмущения дает возможность выполнить, в том числе и аналитические решения и провести их анализ.

2.1 Аналитическое решение математических моделей

Рассмотрим эту задачу применительно к наиболее простой динамической системе – **линейной с гармоническим внешним возмущением**. Графически модель такой системы приведена на рис. 1.7 и рис. 1.9 - перемещение массы (комбайна, суппорта) с помощью упругого органа (цепь, пружина, винт) при наличии трения в системе (сухого, вязкого и др.).

Математическая модель рассматриваемой системы представлена аналитической зависимостью (1.1). Для этих систем параметры математической модели n и ω – постоянные величины.

Не нарушая общности, примем в качестве внешнего возмущения только переменную составляющую гармонического возмущения, т.е. $f(t) = a \cdot \sin \lambda t$. Здесь для удобства частоту внешнего возмущения обозначено λ ; $a = F \cdot m^{-1}$; $\varphi = 0$.

Известно, что общим решением уравнения (1.1) является сумма решений однородного уравнения x_0 и частного решения x_1 , т.е.

$$x = x_0 + x_1 .$$

Решением однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0 ,$$

соответствующего данному неоднородному дифференциальному уравнению, будет

$$x_0 = e^{rt} ,$$

где r – корень характеристического уравнения.

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0 ,$$
$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} ,$$

При этом возможны три случая:

$$1. D = (n^2 - \omega^2) < 0. \quad 2. D > 0. \quad 3. D = 0.$$

Случай 1. $D < 0$. Это означает, что $n < \omega$, а системы, для которых имеет место это соотношение, называют системами с малыми вязким сопротивлением.

Тогда

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2} \equiv -n \pm ip; \quad p = \sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Подставляя корни характеристического уравнения в решение однородного уравнения, получим два частных решения:

$$x_{01} = 0,5C_1(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt} \cos pt,$$

$$x_{02} = \frac{1}{2i} C_2 (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt} \sin pt.$$

Полное решение уравнения

$$x_0 = e^{-nt} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt), \quad (2.1)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий. Положим, что при $t=0$ $x_0=S_0$, $\dot{x} = V_0$, получим:

$$C_1 = S_0; \quad C_2 = p^{-1}(V_0 + nS_0)$$

Тогда полное решение однородного уравнения примет вид:

$$x_0 = e^{-nt} [S_0 \cos pt + (V_0 + nS_0)p^{-1} \sin pt]$$

которое удобно представить в виде (свернуть):

$$x_0 = A_0 e^{-nt} \sin(pt + \psi), \quad (2.2)$$

где

$$C_1 = A_0 \sin \psi; \quad C_2 = A_0 \cos \psi; \quad A_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};$$

$$\psi = \arctg(C_1 C_2^{-1}).$$

Из полученных выражений (2.1) или (2.2) решения однородного дифференциального уравнения следует: каково бы ни было выражение в скобках (2.1) или сомножитель $A_0 \sin(pt + \psi)$ в случае (2.2) при $t \rightarrow \infty$ $x_0 \rightarrow 0$, т.е. по истечению определенной продолжительности система возвратится в исходное равновесное состояние. При этом наличие периодического (периода $\frac{2\pi}{p}$) сомножителя свидетельствует о колебательном характере перехода системы в равновесное (первоначальное) положение [7], рис.2.1.

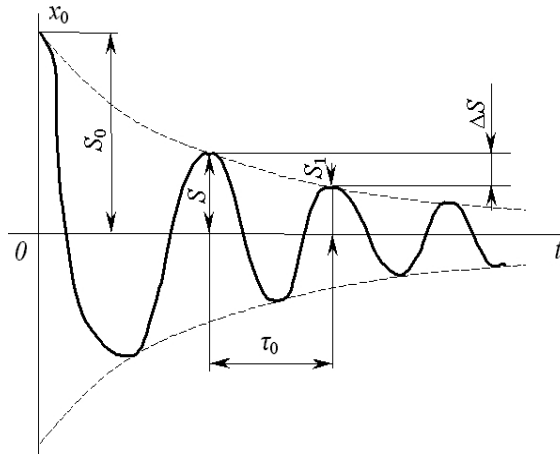


Рис.2.1 - Графическое представление свободных колебаний системы с малым вязким сопротивлением

Период решения однородного уравнения:

$$\tau_0 = 2\pi p^{-1} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega^2}}}.$$

представим в виде

$$\tau_0 = \tau \left[\sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega^2}} \right]^{-1}, \quad \tau = 2\pi\omega^{-1}.$$

Тогда отношение

$$A_0 e^{-nt} [A_0 e^{-n(t + \tau_0)}]^{-1} = e^{n\tau_0} = \mu$$

называют коэффициентом затухания, а величину

$$\delta = \ln \mu = n\tau_0 = 2\pi \left[\sqrt{\omega^2 n^{-2} - 1} \right]^{-1}$$

называют логарифмическим декрементом (затуханием) колебаний.

На практике, если имеется графическое представление решения или аналитическое решение однородного дифференциального уравнения, логарифмический декремент колебаний определяется как отношение уменьшения амплитуды колебаний через период τ_0 , рис.2.1. Действительно, обозначив отклонения системы от равновесного состояния S и через период $\tau_0 - S_1$, а $S - S_1 = \Delta S$, получим, что

$$\delta = \ln[S(S - \Delta S)^{-1}].$$

Или, разложив в ряд отношение под знаком логарифма, получим

$$\delta = \ln(1 + \Delta S \cdot S^{-1} + \Delta S^2 \cdot S^{-2} + \dots)$$

Откуда, приближенно,

$$\delta \approx \frac{\Delta S}{S}.$$

Следовательно, наличие вязкого сопротивления (или просто сопротивления в системе), обуславливающего необходимость расходовать (рассеивать) энергию на преодоление этого сопротивления приводит к тому, что выведенная раз из равновесного состояния и предоставленная самой себе динамическая система приходит снова к прежнему равновесному состоянию. Другими словами, колебания в системе затухают. Темп или скорость затухания колебаний в системе определяются ее логарифмическим декрементом.

Поскольку n мало ($n \rightarrow 0$), $\tau_0 \approx \tau$. Это означает, что наличие малого сопротивления почти не изменяет периода колебаний системы.

Случай 2. $D > 0$, $n > \omega$ – случай “большого” сопротивления.

В этом случае корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} \equiv -n \pm p_1; \quad p_1 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

являются вещественными и решение однородного уравнения принимает вид

$$x_0 = e^{-nt} (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{-p_1 t}).$$

Случай 3. $D = 0$, $n = \omega$. Корни характеристического уравнения вещественны и равны между собой. Решение однородного уравнения принимает вид

$$x_0 = e^{-nt} (C_1 t + C_2).$$

Решения уравнения, или, что то же, движения системы в случаях 2 и 3 называются апериодическими; для случая 3 - предельно апериодическим.

Частное решение дифференциального уравнения x_y обычно ищут в том же виде, что и вид правой части исходного уравнения,

$$x_y = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t, \quad (2.3)$$

где A и B - постоянные; λ – частота внешнего возмущения.

Для нахождения постоянных A и B частное решение подставляют в исходное дифференциальное уравнение. С этой целью дважды продифференцировав выражение (2.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}_q &= A \lambda \cos \lambda t + B \lambda \sin \lambda t; \\ \ddot{x}_q &= -A \lambda^2 \sin \lambda t - B \lambda^2 \cos \lambda t,\end{aligned}$$

и подставив его в исходное дифференциальное уравнение, а затем приравняв выражение при $\sin \lambda t$ и $\cos \lambda t$, получим систему из двух алгебраических уравнений, после решения которой будем иметь

$$\begin{aligned}A &= a \frac{p^2 - \lambda^2}{(p^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}; \\ B &= -a \frac{2n\lambda}{(p^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}.\end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно частное решение представить в виде

$$x_q = N \sin(\lambda t - \alpha),$$

где

$$\begin{aligned}N &= \sqrt{A^2 + B^2} = a[(p^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2]^{-1/2}; \\ \alpha &= \arctg(-B/A) = \arctg[2n\lambda(p^2 - \lambda^2)^{-1}].\end{aligned}$$

Учитывая, что при “малых” значениях n , можно положить: $p^2 = \omega^2 = c/m$, получим

$$x_q = \frac{x_c \sin(\lambda t - \alpha)}{\sqrt{[1 - (\lambda/\omega)^2]^2 + 4n^2 \lambda^2 / \omega^4}}.$$

Здесь $x_c = F/C$.

Или, положив $\lambda t - \alpha = \frac{\pi}{2}$, запишем

$$\frac{x}{x_c} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\lambda/\omega)^2]^2 + 4n^2 \lambda^2 / \omega^4}},$$

показывающее во сколько раз отклонение системы от равновесного состояния при динамической (периодической) нагрузке больше отклонения ее при статической нагрузке той же величины.

$$\text{Отношение } \frac{1}{\sqrt{[1 - (\lambda/\omega)^2]^2 + 4n^2 \lambda^2 / \omega^4}} = K_\delta$$

принято называть коэффициентом динамичности системы или ее амплитудно-частотной характеристикой.

Рассмотрим более детально коэффициент динамичности системы, как функцию частоты:

1. При частоте нагрузки $\lambda = 0$, $K_\delta = 1$ – статическое нагружение.

2. При отсутствии рассеяния в системе, т.е. $n = 0$ – идеальная динамическая система, $K_\delta = \frac{1}{[1 - (\lambda/\omega)^2]}$. Во втором случае возможны варианты:

варианты:

2.1. Частота нагрузки стремится к частоте собственных колебаний, $\lambda \rightarrow \omega$, ($\varepsilon = \lambda/\omega \rightarrow 1$), $K_\delta \rightarrow \infty$ – резонанс.

2.2. При $\lambda \rightarrow \omega$, но $\lambda < \omega$ или при $\varepsilon \rightarrow 1$, но $\varepsilon < 1$, коэффициент динамичности возрастает от 1 до ∞ .

2.3. При возрастании частоты нагрузки λ и $\lambda > \omega$ ($\varepsilon > 1$ и возрастает теоретически до ∞) K_δ уменьшается от ∞ до 0.

3. $n \neq 0$ – реальная динамическая система. В этом случае при $\lambda = \omega$ ($\varepsilon > 1$) $K_\delta = \omega^2 / 2n\lambda = \omega/n$, т.к. $\lambda = \omega$.

В общем же случае, взяв производную от K_δ по λ и приравняв ее к нулю, получим

$$\frac{dK_\delta}{d\lambda} = \frac{2(1 - \lambda^2/\omega^2)(-2\lambda/\omega^2) + 8n^2\lambda/\omega^4}{2\sqrt{[1 - (\lambda/\omega)^2]^2 + 4n^2\lambda^2/\omega^4}}.$$

Откуда

$$\lambda^2/\omega^2 = 1 - 2n^2/\omega^2,$$

или

$$\lambda = \omega\sqrt{1 - 2n^2/\omega^2} = \lambda_p,$$

при которой величина K_δ достигает экстремума (максимума). Эта частота для реальной динамической системы называется резонансной λ_p , а максимальная величина коэффициента динамичности

$$K_{\delta.\max} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\lambda_p/\omega)^2]^2 + 4n^2\lambda_p^2/\omega^4}}.$$

Из приведенной зависимости следует, что в реальной динамической системе резонанс (максимальное значение коэффициента динамичности) достигается раньше на величину $1 - \sqrt{1 - 2n^2/\omega^2}$ до совпадения частоты нагрузки с частотой собственных колебаний системы.

Графическое представление коэффициента динамичности системы имеет вид, показанный на рис. 2.2. Тогда общее решение уравнения (1.1) примет вид

$$x = A_0 e^{-nt} \sin(pt + \psi) + K_{\partial} x_c \sin(\lambda t - \alpha),$$

для которого, начиная с некоторого значения $t=t_n$ первое слагаемое (частное решение) из-за равенства нулю e^{-nt_n} , также будет равно нулю, и решение будет иметь вид

$$x = K_{\partial} x_c \cdot \sin(\lambda t - a) \quad (2.4)$$

Период t_n называют переходным или неустановившимся.

Из (2.4) следует, что в установившемся (после периода $t= t_n$) режиме динамическая система находится в колебательном процессе с частотой внешнего возмущения λ , рис.2.3.

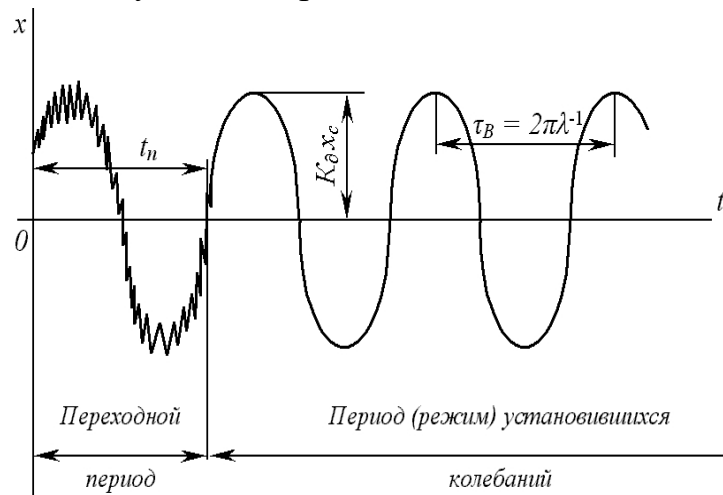


Рис.2.3 - Графическое представление общего решения математической модели линейной динамической системы с гармоническим возмущением

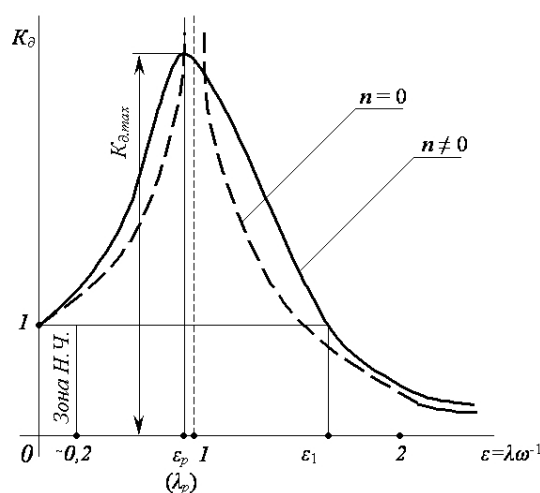


Рис.2.2 - Графическое представление коэффициента динамичности системы

Укажем на одну характерную особенность, присущую линейным динамическим системам. Согласно решению (2.4) и выражению для коэффициента динамичности отклонение системы от равновесного состояния (величина x в (2.4)) в первую очередь обуславливается не отклонением ее при статической нагрузке x_c , а величиной коэффициента динамичности. Последний же зависит от частоты нагрузки, точнее, от близости частоты нагрузки и частоты собственных колебаний системы. Другими словами, для линейных динамических систем определяющим является не амплитуда, а частота нагрузки, поскольку при любой, отличной от нуля амплитуде, и совпадении частот нагрузки с собственными частотами системы коэффициент ее динамичности, а следовательно, и отклонение системы от равновесного состояния, стремится к бесконечности для идеальной динамической системы ($K_0 \rightarrow \infty$). Для реальной динамической системы ($n \neq 0$) величина коэффициента динамичности конечна, но из-за малости величины n она достигает довольно больших значений.

Таким образом, для линейных динамических систем частота нагрузки является определяющим параметром, характеризующим ее поведение при динамическом внешнем возмущении.

Рассмотрим теперь более общую картину – поведение линейной динамической системы при **случайном характере внешнего возмущения**, свойства которого могут быть приняты, близкими к свойствам случайного процесса типа “белого шума”. В этом случае исходное дифференциальное уравнение запишется в виде [7,8]

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \xi(t), \quad (2.5)$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс со свойством “белого шума”, в дальнейшем, для краткости, – случайный белый шум.

Опуская так называемые выкладки решения из-за ряда причин, например, нерассмотрение вопроса о передаточной функции и некоторых других связанных с решением этого типа уравнений вопросов, спектральная плотность дисперсии решения уравнения для установившегося режима работы имеет вид

$$S_x(\lambda) = \frac{S_\xi(t)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \lambda^2},$$

где $S_\xi(t)$ – спектральная плотность случайного белого шума.

Поскольку $S_\xi(t)$ для рассматриваемого случайного процесса – величина постоянная, которую примем равной C_ξ , можно записать, что

$$S_x(\lambda) = \frac{C_\xi}{(\lambda^2 - \omega^2) + 4n^2\lambda^2}.$$

Откуда следует, что при совпадении частот нагрузки и собственных частот системы ($\lambda = \omega$), спектральная плотность дисперсии решения принимает максимальное значение,

$$S_x^{\max}(\lambda) = \frac{C_\xi}{4n^2\lambda^2}.$$

Графически это будет выглядеть так, как показано на рис. 2.4.

Из изложенного выше можно сделать следующее заключение: если линейная динамическая система находится под воздействием случайного процесса со свойствами “белого шума”, то практически всегда найдется частота нагрузки, близкая к частоте собственных колебаний системы.

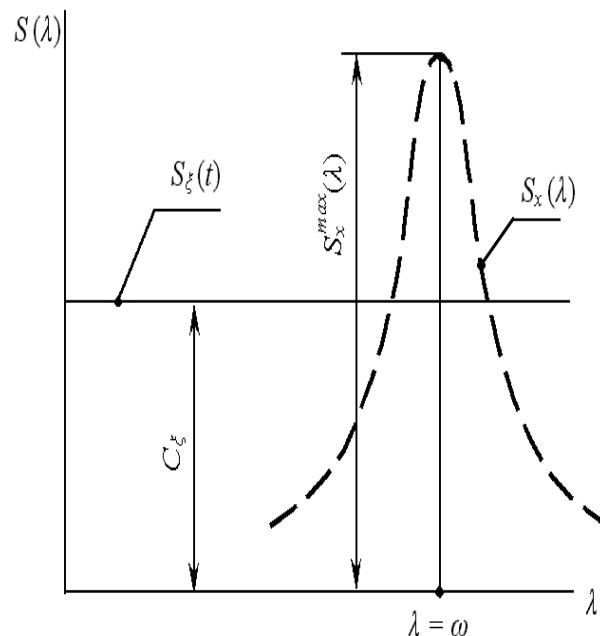


Рис.2.4 - Графическое представление решения математической модели линейной динамической системы со случайным возмущением

На этой частоте, а точнее, на близких к ней частотах, (поскольку площадь линии всегда равна нулю), дисперсия, т.е. отклонение от равновесного состояния системы, будет максимальной. Из этого также следует, что изменения параметров системы (массы, жесткости), обуславливающие изменения ее собственной или собственных для многомассовых систем частот не исключает

колебательного процесса для систем, внешней нагрузкой которых является случайный белый шум, а только смещает (увеличивает или уменьшает) частоты, дисперсия на которых достигает максимальных значений.

2.2 Численные методы решения математических моделей. Детерминированные модели. Линейные модели. Решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений

Как уже говорилось, в детерминированных моделях вся информация о моделируемом явлении или процессе является полностью определенной. Модель, представленная в виде линейных алгебраических, дифференциальных уравнений или их систем будет называться линейной. Однако это не означает, что она описывает линейную систему. Последнее определяется уровнем детализации модели, степенью её приближения к реальному объекту и задачами исследования. Рассмотрим одну из таких моделей. Так, при расчете геометрических погрешностей положения узлов станка, являющихся составными частями общей погрешности обработки детали, применяют аппарат, используемый в динамике твёрдого тела. При этом составляется система трёх алгебраических уравнений относительно проекций вектора погрешности на оси выбранной системы координат. Рассмотрим это на примере бесцентрового шлифования цилиндрической заготовки, например оси, рис. 2.5. На схеме обозначено: 1 - заготовка ; 2-ведущий круг (меньшего диаметра); 3 - шлифующий круг (большего диаметра); 4 - опора (нож). При данной схеме обработки искомой погрешностью будет смещение δ_a точки А заготовки со шлифующим кругом в зависимости от известных смещений точек В и С заготовки, контактирующих с ведущим кругом и ножом :

$$\delta_A = a_{xA} \delta_x + a_{yA} \delta_y ,$$

где a_{xA} , a_{yA} – проекции орта нормали n_A в точке А на оси X и Y; δ_x, δ_y - малые смещения O системы координат соответственно вдоль осей X и Y.

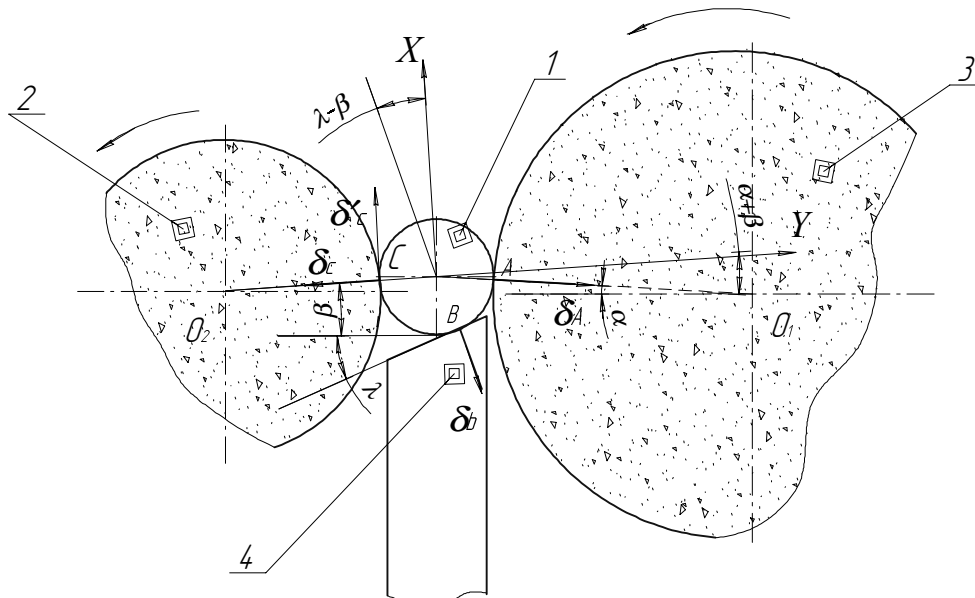


Рис. 2.5 - Схема бесцентрового шлифования

Для определения δ_x, δ_y составим систему уравнений для проекций вектора погрешности:

$$\begin{aligned} -\cos(\lambda - \beta)\delta_x + \sin(\lambda - \beta)\delta_y + o\gamma &= \delta_B; \\ o\delta_x - 1\delta_y + o\gamma &= \delta_c; \\ 1\delta_x + o\delta_y + r\gamma &= \delta'_c, \end{aligned}$$

где $-\delta_B$ и δ_c смещение точек В и С по нормали к цилиндру; δ'_c - смещение точки С по касательной; γ - минимальный угол поворота системы координат относительно оси z; r - радиус-вектор.

Положив в данной системе значения λ и β постоянными величинами, получим систему линейных алгебраических уравнений, являющуюся моделью исследуемого параметра – геометрической погрешности станка.

При нормальном подходе решение систем линейных алгебраических уравнений несложно, если раскрыть определители по формуле Крамера. Однако, при непосредственном раскрытии определителей решение системы с n неизвестными требует n! арифметических операций – уже при n=30 такое число операций недоступно для некоторых ЭВМ. Другой причиной неприемлемости классического способа при решении данной задачи на ЭВМ является сильное влияние округлений на окончательный результат.

Поэтому при решении данной задачи на ЭВМ необходимо пользоваться численными методами, которые представляют собой

приближенные методы решения задач анализа. В связи с этим при использовании численных методов необходимо учитывать следующие погрешности: погрешности описания моделей задачи ; погрешности, обусловленные неточностью исходных данных ; погрешности выполнения арифметических действий. По поводу последних следует напомнить, что предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых. Предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей.

Итак, рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = d_n, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты; $i, j = \overline{1, n}$ - действительные числа. Эту систему можно представить в матричной форме:

$$Ax=d, \tag{2.6}$$

где $A=[a_{ij}]^n_1$, $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, T - символ транспонирования. К решению таких уравнений сводится не только большое число задач, возникающих в технике, но и чисто задач анализа, связанных с приближенным решением систем дифференциальных или интегральных уравнений и др. Одним из точных численных методов (дающих минимальную погрешность округлений) решения систем линейных алгебраических уравнений, является метод Гаусса по схеме Халецкого, для реализации которой необходимо $n(2n-1)$ арифметических операций. По данному методу матрица коэффициентов A представляется в виде произведения двух треугольных матриц, т.е.

$$A = CB \tag{2.7}$$

где C - нижняя треугольная матрица ; B - верхняя треугольная матрица, причем ее диагональные коэффициенты равны единице. Подставив (2.7) в (2.6),

$$CBx=d. \tag{2.8}$$

Обозначим $Bx=y$
и перепишем (2.8) в виде

$$Cy=d. \tag{2.9}$$

Решение (2.9) называется прямым ходом метода Гаусса, решение (2.8) - обратным ходом метода Гаусса.

Алгоритм вычисления элементов матриц С и В, а также элементов векторов у и х удобно представлять в виде таблицы, например, для n=5

I	III	V	VII	IX			
c ₁₁	b ₁₂	b ₁₃	b ₁₄	b ₁₅	y ₁	II	
c ₂₁	c ₂₂	b ₂₃	b ₂₄	b ₂₅	y ₂	IV	
c ₃₁	c ₃₂	c ₃₃	b ₃₄	b ₃₅	y ₃	VI	
c ₄₁	c ₄₂	c ₄₃	c ₄₄	b ₄₅	y ₄	VIII	
c ₅₁	c ₅₂	c ₅₃	c ₅₄	c ₅₅	y ₅	X	
x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	-	XI	

Последовательность вычисления элементов обозначена римскими цифрами. Для определения c_{ij} - необходимо умножить элемент таблицы c_{ik}, который находится слева, от c_{ij}, в строке i, на соответствующий элемент таблицы b_{kj}, расположенный сверху от c_{ij} в столбце j, и получаемые результаты сложить. Например, для вычисления c_{4,4} надо определить

$$c_{4,1}b_{1,4} + c_{4,2}b_{2,4} + c_{4,3}b_{3,4} = c'_{4,4}.$$

Получаемый результат вычитают из соответствующего элемента матрицы А:

$$c_{4,4} = a_{4,4} - c'_{4,4}.$$

Для вычисления элементов матрицы В и вектора у результат, полученный по аналогии с вычислением C_{ij}, , делят на C_{ii}, например,

$$b'_{4,5} = c_{4,1}b_{1,5} + c_{4,2}b_{2,5} + c_{4,3}b_{3,5};$$

$$b_{4,5} = (a_{4,5} - b'_{4,5})/c_{4,4}$$

Таким же образом вычисляют и у_i:

$$y'_4 = c_{4,1}y_1 + c_{4,2}y_2 + c_{4,3}y_3; \quad y_4 = (d_4 - y'_4)/c_{4,4}.$$

Обратный ход – нахождение x_i осуществляется так: x₅=y₅. Для вычисления x₄ перемножают четвертую строку матрицы В на вектор х и вычитают полученное значение из у₄ :Ъ

$$x_4 = y_4 - x_5b_{4,5}; \quad x'_3 = x_5b_{3,5} + x_4b_{3,4}; \quad x_3 = y_3 - x'_3.$$

Кроме указанного метода, существуют также и другие численные методы решения системы линейных алгебраических уравнений: метод простой итерации, метод Зейделя и др.

Если нам необходимо решить численно не систему, а, одно нелинейное алгебраическое уравнение, то можно воспользоваться, например, методом хорд или методом касательных.

Сущность метода хорд, рис.2.6,а, состоит в том что корень (с) исходного уравнения $y = f(x)$ локализуем на интервале $[a,b]$. Далее проводим хорду АВ, уравнение которой будет:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

В этом уравнении полагаем $y=0$. Тогда

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

и $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b - a_1)}{f(b) - f(a_1)}$ и т. д., пока разность $a_2 - a_1$ не станет менее заданной погрешности вычислений.

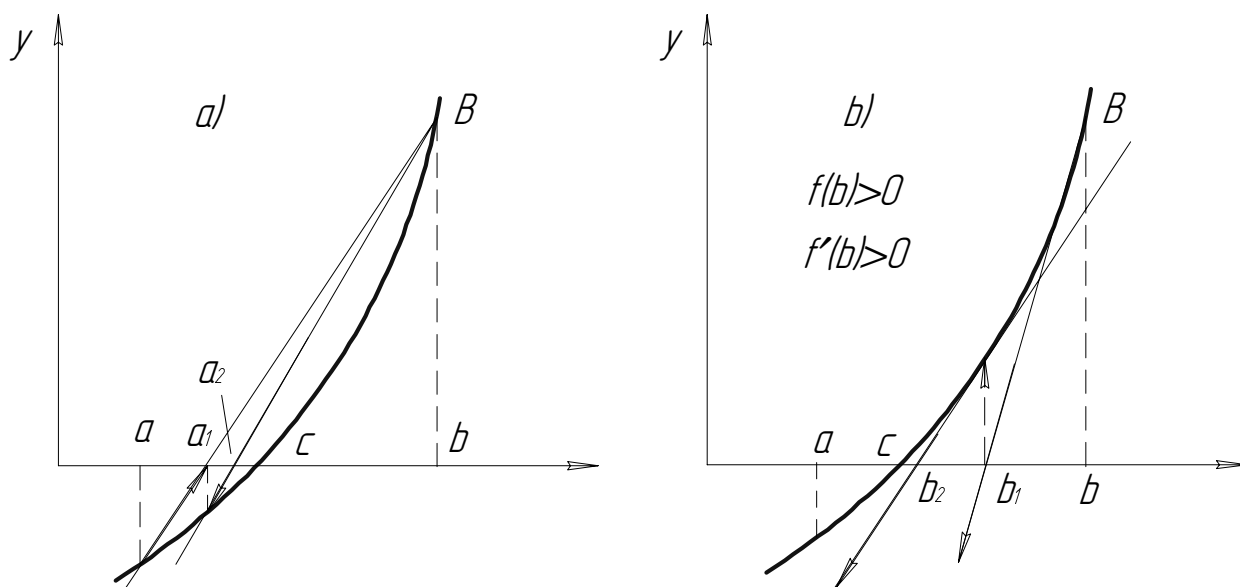


Рис. 2.6 - Графическое представление методов Хорд (а) и касательных (б)

С Сущность метода касательных (см. рис.2.6, б) состоит в том что к графику функции $y = f(x)$ в точке А или В (границы интервала, содержащего корень уравнения) проводим касательную и

за приближенное значение корня принимаем точку пересечения этой касательной с осью ОХ. Касательную надо проводить в той точке, в которой функция и её вторая производная имеют один и тот же знак.

Уравнение касательной точке В:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

или

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Пусть $y = 0$, тогда $b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, $b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$ и т. д.

Данный метод называют ещё методом Ньютона-Рафсона.

2.3 Численное дифференцирование и интегрирование функций

При рассмотрении вопроса численного решения нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона-Рафсона было показано, что для решения уравнения необходимо вычисление первой и второй производной заданной функции. Если мы знаем аналитические выражение для этих производных, то вычисление их значений не представляет труда. Однако человеку, который решает алгебраическое уравнение, например, на ЭВМ совсем необязательно помнить правила дифференцирования, т.к. эту процедуру можно выполнить численно на той же ЭВМ.

Простейшие формулы численного дифференцирования получают в результате дифференцирования интерполяционных формул:

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x).$$

В частности, если узлы интерполяции расположены на равных расстояниях с шагом h , то, $x_i = x_0 + hq$, а разность между соответствующими значениями функции x_0 и x_i будет конечной разностью. Конечные разности k -го порядка выражается через значения функции по формуле:

$$\Delta^k f_i = \Delta^k y_0 = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f_{i+k-j}(x_i),$$

где $C_k^j = k!/[j!(k-j)!]$ - число сочетаний из k элементов по j . Тогда формула для численного определения первой производной функции

$$f'(x) \approx \frac{1}{n} [\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \dots + \dots + \frac{nq^{n-1} - (n-1)S_{n-1}^{(1)}q^{n-2} + \dots + (-1)S_{n-1}^{(n-1)}}{n!} \Delta^n y_0],$$

где $S_k^{(i)}$ - сумма всех $j = \overline{1, k}$ по i сомножителей. Например, $S_3^{(1)} = 1+2+3=6$; $S_3^{(2)} = 1*2+1*3+2*3=11$; $S_3^{(3)} = 1*2*3=6$.

Действием, противоположным дифференцированию, является интегрирование функций. Простейшие формулы численного интегрирования функций получаются из приближенного вычисления определенного интеграла. Идея приближенного вычисления интегралов состоит в следующем: площадь криволинейной трапеции под интегралом заменяем на площадь такой фигуры, которая имеет то же основание, сверху ограничена линией, примыкающей к линии $f(x)$, но такой, чтобы площадь фигуры под этой линией можно было вычислить, не прибегая к определению интеграла. В технологии машиностроения и теории резания можно встретить ряд задач, приводящих к необходимости вычисления интеграла. Например, при рассмотрении вопроса расчета хрупкой прочности режущей части инструмента. По Масуда Касуаки нормальные и касательные напряжения распределяются по режущей кромке инструмента равномерно, рис.2.7. Режущая кромка представлена в виде плоского клина с углом при вершине 2α .

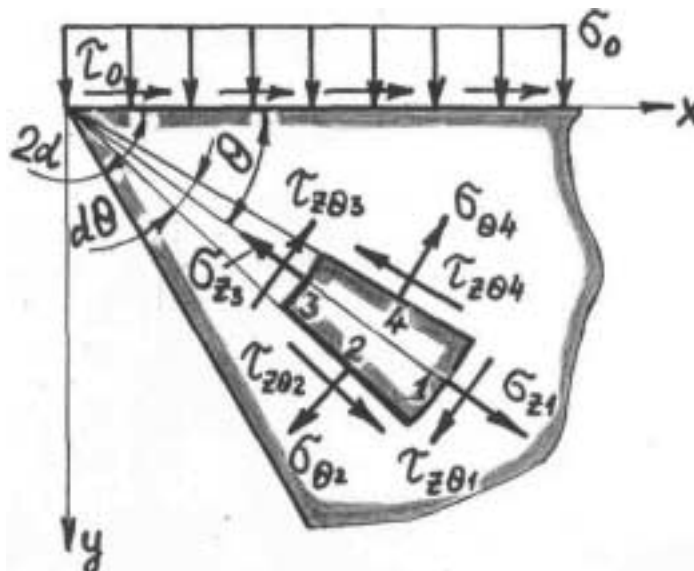


Рис.2.7 - Напряжения в режущем клине реза.

Тогда в полярных координатах составляющие полного напряжения в клине

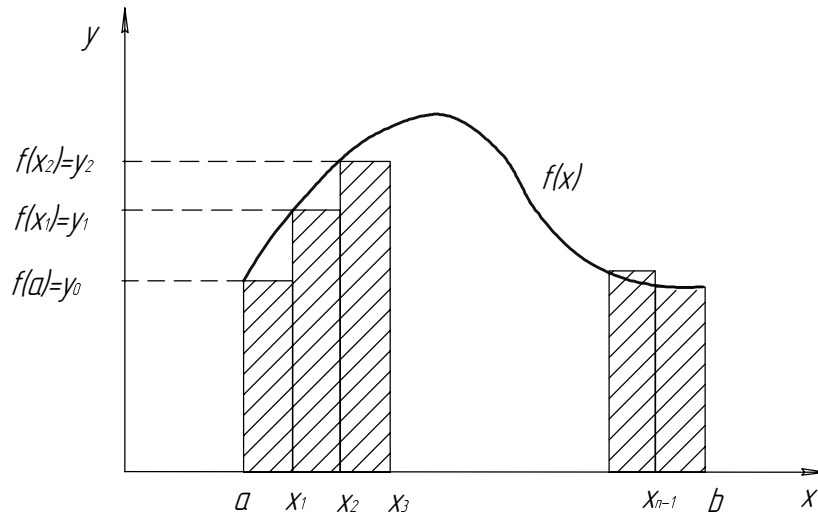


Рис.2.8 - Графическое представление метода прямоугольников.

$$\sigma_{\theta} = 0,5\pi i \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z(z+1)\overline{\Phi} r^{-z^2} dz;$$

$$\sigma_r = 0,5\pi i \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[d^2 \Phi / d\theta^2 - z \overline{\Phi} \right] r^{-z^2} dz;$$

$$\tau_{r\theta} = 0,5\pi i \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (z+1) d\overline{\Phi} / d\theta r^{-z^2} dz,$$

где Φ - функция напряжения. Из полученных зависимостей следует, что все они содержат интегралы, значения которых можно вычислить и численными методами. Рассмотрим некоторые из этих методов.

Метод прямоугольников.

Основание криволинейной трапеции разбиваем на n равных частей, рис.2.8

Длину каждого интервала обозначим через

$$h = (b - a)/n.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx h[f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Эту зависимость можно записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

или в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Метод трапеций.

Является аналогом метода прямоугольников. Однако здесь вместо прямоугольников рассматриваются, элементарные прямоугольные трапеции, рис.2.9.

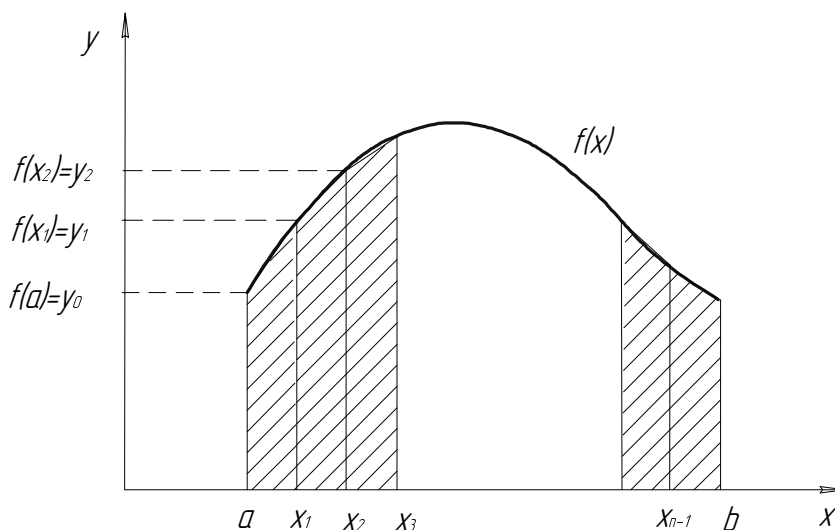


Рис 2.9 - Графическое представление метода трапеций.

Вычислительная формула

$$\int_b^a f(x)dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] =$$
$$= h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 \dots + y_{n-1} \right].$$

Как видно, метод трапеций позволяет получить меньшую погрешность вычисления интеграла, чем метод прямоугольников. Однако и этот метод дает некоторую погрешность:

$$R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

где $\max_{x \in [a,b]} f''(x)$ - максимальное значение второй производно функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ по абсолютной величине.

Метод Симпсона (парабол)

Интервал $[a,b]$ разбиваем на n равных частей, причем n должно быть четным (рис.2.10).

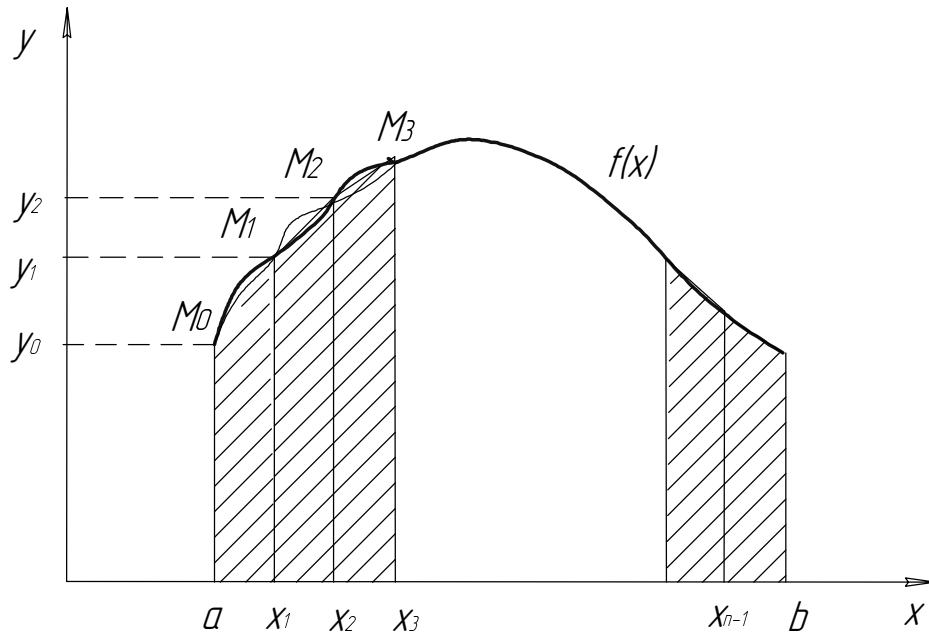


Рис.2.10 - Графическое представление метода Симпсона.

Через т.т. M_0, M_1, M_2 , абсциссы которых соответствуют x_0, x_0+h, x_0+2h можно провести параболу. Через точки M_2, M_3, M_4 тоже проводим параболу и т. д. В результате получаем расчетную зависимость:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{6} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] =$$

$$= \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

Погрешность метода Симпсона

$$R(f) \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|,$$

где $\max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$ — максимальное значение четвертой производной функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ по абсолютной величине.

Кроме указанных методов, еще применяется квадратурная формула Гаусса

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m A_i f(x_i),$$

где A_i — коэффициенты полинома; x_i — узлы интерполяции. Здесь задача сводится к определению значений A_i и x_i из условий требуемой точности расчетов.

2.4 Численное интегрирование дифференциальных уравнений

При рассмотрении вопроса о моделировании систем, видах моделей мы построили математическую модель динамической системы токарно-винторезного станка, используемую при исследовании вибраций, возникающих при резании. Данная математическая модель была представлена в виде дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений может быть получено либо аналитически, либо численными методами, являющимися приближенными. Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y).$$

Необходимо найти решение уравнения, удовлетворяющее условию:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ на интервале } [x_0, b].$$

Идея метода Эйлера состоит в том, что интегральную кривую, соответствующую частному решению, удовлетворяющему начальному условию, заменяем на ломаную линию, рис. 2.11.

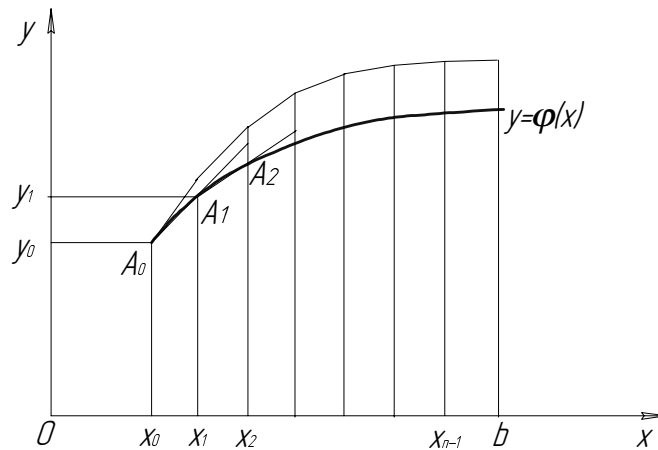


Рис. 2.11 - Графическое представление метода Эйлера.

При этом интервал $[x_0, b]$ разбивается на n равных отрезков $h = (b - x_0) n^{-1}$.

Исходя из уравнения можем определить угловой коэффициент касательной к интегральной линии в точке (x_0, y_0)

$$k = f(x_0, y_0).$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$y - y_0 = f'(x_0, y_0)(x - x_0).$$

На отрезке $[x_0, x_1]$ дугу кривой $\varphi(x)$ заменяем на отрезок касательной. Найдем приближенное значение решения в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + f'(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f'(x_0, y_0)h.$$

Далее находим угловой коэффициент касательной в точке (x_1, y_1) :

$$k_1 = f'(x_1, y_1)$$

и уравнение касательной

$$y - y_1 = f'(x_1, y_1)(x - x_1).$$

На интервале $[x_1, x_2]$ дугу $y = \varphi(x)$ заменяем на отрезок касательной. В точке x_2 находим приближенное решение

$$y_2 = y_1 + f'(x_1, y_1)h \text{ и т. д.}$$

В общем виде вычислительная формула метода

$$y_n = y_{n-1} + f'(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Метод итераций.

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{2.10}$$

необходимо найти его решение, удовлетворяющее условию

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

От уравнения (2.10) перейдем к равносильному ему уравнению:

$$dy = f(x, y)dx; \quad \int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx.$$

Тогда

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f[t; y(t)]dt,$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t; y(t)] dt. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) равносильно уравнению (2.10) с учетом начальных условий

В качестве нулевого приближения можно взять $y=y_0$. Тогда

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t; y_0] dt;$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t; y_1(t)] dt \dots$$

В общем виде вычислительная формула метода:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t; y_{n-1}(t)] dt.$$

Метод Рунге-Кутты.

Пусть известно первое значение $y(x)$, требуется вычислить

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+t) dt.$$

Метод Рунге-Кутты основан на замене интеграла в этом уравнении по формуле прямоугольников с кратным узлом

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x+h/2) + o(h^3),$$

или

$$y(x+h) = y(x) + hf[x+h/2; y(x+h/2)] + o(h^3),$$

где $o(h^3)$ -порядок погрешности формулы.

Если обозначить $y^* = y(x+h/2)$, то

$$y(x+h) = y(x) + hf(x+h/2; y^*) + o(h^3).$$

Вычислим y^* по формуле Эйлера с шагом $h=0,5h$:

$$y^* = y(x) + 0,5hf[x, y(x)]$$

Тогда при

$$y_{j+1} = y(x+h)$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+0.5}; y_{j+0.5}); \quad y_{j+0.5} = y_j + 0,5hf(x_j, y_j).$$

Полученный метод относится к семейству методов Рунге-Кутты. В процессе вычислений фиксированы некоторые числа $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, p_1, p_2, \dots, p_q, \beta_{ij}; i, j = \overline{1, q-1}$.

Последовательно получаем

$$k_1(h) = hf(x, y);$$

$$k_m(h) = hf[x + \alpha_m h; y + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} k_j(h)]; m = \overline{2, q}.$$

Полагаем

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h).$$

Обозначим $\varphi(h) = y(x+h) - y(x)$. Пусть $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$, а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой гладкой функции $f(x, y)$.

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, 0 < \theta < 1.$$

Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а S -порядком погрешности метода.

Для метода Рунге-Кутты четвертого порядка ($q=s=4$) наиболее употребительна совокупность формул

$$k_1 = hf(x, y); \quad k_2 = hf(x+h/2; y+k_1/2);$$

$$k_3 = hf(x+h/2; y+k_2/2); \quad k_4 = hf(x+h; y+k_3);$$

$$\Delta y = 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Вычислительная схема метода Рунге-Кутты:

1. Выбираем шаг h на отрезке $[x_0, b]$, $n=(b-x_0)/h$, задаем точность решения Δ .

2. Принимаем $r_1 = \rho_1 = 0; r_4 = 1; r_2 = r_3 = 0,5; \rho_2 = 0,5; \rho_3 = 0,5; \rho_4 = 1;$

$$k_i = hf(x+r_i h; y + \rho_i k_{i-1}); i = \overline{1, 4}.$$

3. Вычисляем

$$y_{i+1} = y_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); i = \overline{0, n-1}.$$

4. При нечетных значениях i вычисляем \tilde{y}_{i+1} с удвоенным шагом

$$\tilde{y}_{i+1} = y_{i-1} + 1/6(\tilde{k}_1 + 2\tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4);$$

$$\tilde{k}_j = 2hf(x+r_j 2h; y + \rho_j \tilde{k}_{j-1}); j = \overline{1, 4}.$$

5. Оцениваем неравенство

$$|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| \leq \Delta.$$

Если неравенство выполняется, то продолжаем вычисления y_{i+2} с прежним шагом, если нет, то делим шаг $h=h/2$ и вычисляем снова y_i, y_{i+1}

2.5 Численные методы математической физики

Из теории резания металлов следует, что тепловые явления при резании оказывают большое влияние на качество поверхностного слоя материала, точность обработки, износ и стойкость режущего инструмента, а следовательно, и на производительность обработки. При описании такого сложного процесса как резание принимаются определенные допущения. Поэтому при математическом описании распределения тепла и температуры при резании применяются численные методы.

Температура в любой точке тела (режущего инструмента, заготовки) с координатами x, y, z в любой момент времени определяется дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа - уравнением теплопроводности, - которое для плоской задачи имеет вид:

$$C(T)\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + W,$$

где $C(T)$ - теплоемкость материала; ρ - плотность; V_x, V_y - проекции вектора скорости перемещающегося источника тепла на оси x, y соответственно; W - интенсивность теплового источника; $k(T)$ - теплопроводность металла; T - температура; t - время.

Кроме указанного (параболический) типа существуют еще 2 типа дифференциальных уравнений в частных производных:

—гиперболический тип, описывающий процессы колебаний,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + f(\mathbf{x}, t);$$

- эллиптический тип, описывающий стационарные процессы, например, процессы диффузии,

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu = -f(\mathbf{x}).$$

Задача Коши (задача отыскания решения дифференциального уравнения) ставится следующим образом:

— для уравнения параболического типа;

Найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$, достаточно гладкую, удовлетворяющую исходному дифференциальному уравнению при $t > 0$ и начальному условию при $t=0$;

— для уравнения гиперболического типа;

Найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$, достаточно гладкую и удовлетворяющую исходному уравнению при $t > 0$ и начальным условиям при $t=0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x),$$

где $u_0(x)$, $u_1(x)$ - заданные гладкие функции.

Областью определения этих двух уравнений, имеющих определенный интерес (в отличие от третьего типа) для механиков, будем считать цилиндр $G \times [0, T]$ высоты T с основанием G .

Кроме начальных условий для указанных типов уравнений указываются и граничные условия, которые могут быть 3 типов:

— граничное условие I рода

$$u|_s = \mu_0;$$

— граничное условие II рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_s = \mu_1;$$

- граничное условие III рода

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right]_s = \mu_2,$$

где μ_1, μ_0, μ_2 - заданные гладкие функции; n - внешняя нормаль к боковой поверхности области определения (цилиндру) уравнений.

Рассмотрим численное решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (для двумерного, приведенного в начале раздела, решение не рассматриваем в виду его громоздкости). Эта задача заключается в отыскании решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t) \quad (2.12)$$

с условием на прямой $t=0$

$$u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.13)$$

Будем считать, что задачи (2.13) и (2.14) имеют единственное решение $u(x,t)$ непрерывное вместе со своими производными $\frac{du}{dt}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $k = \overline{1,4}$, $t \in [0, T]$.

Тогда область $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$, в которой имеет место данное уравнение, а контур, ее ограничивающий, будет объединением прямых $t=0$ и $t=T$.

Введем в области $D \times D_t$ прямоугольную равномерную сетку с шагами h и τ :

$$D_h = \{x_k = kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad h > 0, \quad t_i = i\tau, \quad i = \overline{0, N}, \tau > 0\}$$

Обозначим $u(x_k, t_i)$ - точное решение функции $u(x,t)$ в узле (x_k, t_i) , u_k^i - соответствующее ему приближенное значение сеточной функции $u(x_k, t_i)$.

Выберем двухслойный шаблон для вычисления значения u_k^i , рис.2.12,а.

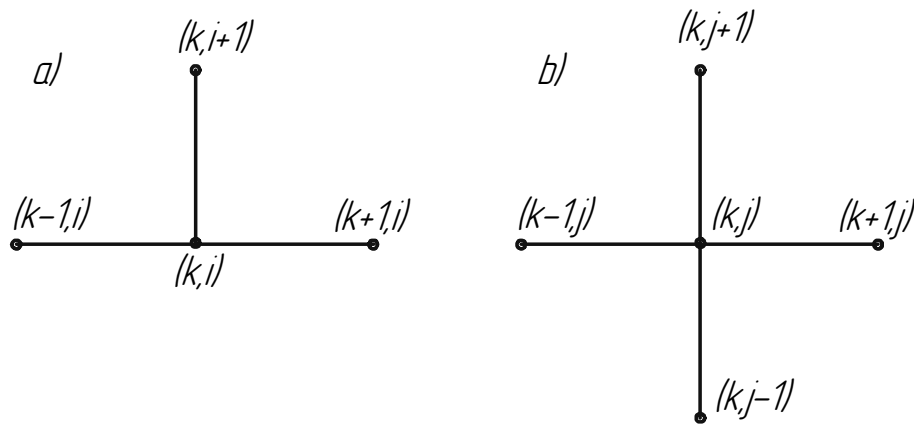


Рис. 2.12 - Шаблоны для решения дифференциальных уравнений в частных производных

Подставим вместо $\frac{du}{dt}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ их разностные аналогии:

$$\frac{\partial u(x_k, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - u(x_k, t_i)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(1)})}{\partial t^2}, \quad t_i < t_i^{(1)} < t_{i+1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{k+1}, t_i) - 2u(x_k, t_i) + u(x_{k-1}, t_i))}{\tau^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^4},$$

$$x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_{k+1}.$$

Получим следующую разностную схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} - \frac{u_{k+1}^i - 2u_k^i + u_{k-1}^i}{h^2} &= f_k^i \\ u_r^0 &= \psi_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad i = \overline{0, N-1} \end{aligned} \right\}, \quad (2.14)$$

которая позволяет по значениям решения на нулевом слое, т.е. по значениям u_k^0 , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вычислить, значения u_k^1 на первом слое. Для этого нужно положить $i=0$ в (2.14) и т.д.

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_k^{i+1} &= \tau/h^2 (u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) + (1 - 2\tau/h^2) u_k^i + \tau f_k^i; \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Формула (2.15) позволяет в явном виде получить решение u_k^i , поэтому разностная схема (2.14) называется явной. Эта схема устойчива (обеспечивает сходимость ее решения к точному решению задачи) при выполнении условия $\tau/h^2 \leq 0,5$.

Смешанная задача для уравнений параболического и гиперболического типов ставится следующим образом. Требуется найти функцию $u(x,t)$, определенную в области $G \times [0, T]$, обладающую в ней достаточной гладкостью и удовлетворяющую в цилиндре $G \times [0, T]$ исходному дифференциальному уравнению, начальному условию и одному из граничных условий.

Рассмотрим решение смешанной задачи на примере одномерного уравнения теплопроводности. Найдем функцию $u(x,t)$, которая в области $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t) \quad (2.16)$$

с начальным условием

$$u(x, t)|_{t=0} = \psi(x); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.17)$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \left[\alpha_0(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0(t)u \right]_{x=0} &= \eta_0(t) \\ \left[\alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(t)u \right]_{x=1} &= \eta_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Функции $\varphi(x,t)$, $\psi(x)$, $\eta_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ - известны, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = \overline{0,1}$.

Будем считать, что задачи (2.16) (2.17) (2.18) имеют единственное решение, непрерывное в D вместе со своими производными $\partial^i u / \partial t^i$, $i = \overline{1,2}$; $\partial^k u / \partial x^k$, $k = \overline{1,4}$.

Заменяем область D сеточной областью

$$D_h = \{x_k = kh, \quad k = \overline{0, M}; \quad h = 1/M; \quad t_i = i\tau; \quad i = \overline{0, N}; \quad \tau = T/N\}$$

Аппроксимируем граничные условия (2.18) так, чтобы обеспечить порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0^i \frac{u(x_1, t_i) - u(x_0, t_i)}{h} + \beta_0^i u(x_0, t_i) &= \eta_0^i + \alpha_0^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, t_i)}{\partial x^2}; \\ \alpha_1^i \frac{u(x_M, t_i) - u(x_{M-1}, t_i)}{h} + \beta_1^i u(x_M, t_i) &= \eta_1^i + \alpha_1^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_M, t_i)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

где $\alpha_j^i = \alpha_j(t_i)$; $\beta_j^i = \beta_j(t_i)$; $\eta_j^i = \eta_j(t_i)$, $j = \overline{0,1}$.

Отбрасывая в правой части члены, имеющие первый порядок относительно h , получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^i \frac{u_1^i - u_0^i}{h} + \beta_0^i u_0^i &= \eta_0^i \\ \alpha_1^i \frac{u_M^i - u_{M-1}^i}{h} + \beta_1^i u_M^i &= \eta_1^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha_0^i / hu_1^i + (\beta_0^i - \alpha_0^i / h) u_0^i &= \eta_0^i; \\ (\alpha_1^i / h + \beta_1^i) u_M^i - \alpha_1^i / hu_{M-1}^i &= \eta_1^i \end{aligned} \right\}$$

Получаем явную разностную схему, аппроксимирующую задачи (2.16), (2.17), (2.18):

$$\left. \begin{aligned}
u_k^{i+1} &= r(u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) + (1-2r)u_k^i + \tau\varphi_k^i; \\
& k = \overline{1, M-1}; \quad i = \overline{0, N-1}; \\
u_k^0 &= \psi_k, \quad k = \overline{0, M}; \\
u_1^{i+1} &= (1 - h\beta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1})u_0^{i+1} + h\eta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1}, \\
& i = \overline{0, N-1}; \\
u_{M-1}^i &= (1 + h\beta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1})u_M^{i+1} - h\eta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1}; \\
& i = \overline{0, N-1}
\end{aligned} \right\}$$

Здесь $r = \tau/h^2$ – погрешность аппроксимации.

Рассмотрим численное решение одномерного уравнения гиперболического типа, описывающего поперечные колебания однородной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

где $f(x, t)$ – известная дважды непрерывно дифференцируемая в области $D = \{0 \leq x \leq b, \quad 0 < t < T\}$ функция.

В начальный момент $t=0$ заданы условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \quad (2.20)$$

Концы струны движутся по заданным законам

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t). \quad (2.21)$$

Функции $u_0(x), u_1(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ заданные функции.

Введем в области D прямоугольную сетку

$$x_k = kh; \quad k = \overline{0, M}; \quad h > 0; \quad t_j = j\tau; \quad j = \overline{0, N}; \quad \tau > 0.$$

Рассмотрим трехслойный пятиточечный шаблон, рис 2.12,б.

Заменим производные, входящие в уравнение (2.19), соответствующими разностными формулами:

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial t^2} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - 2u(x_k, t_i) + u(x_k, t_{i-1}))}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^4 u(x_k, t_i^{(4)})}{\partial t^4},$$

$$t_{i-1} < t_i^{(4)} < t_{i+1};$$

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{k+1}, t_i) - 2u(x_k, t_i) + u(x_{k-1}, t_i))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^4},$$

$$x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_{k+1}.$$

Получаем следующее разностное уравнение

$$\frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{k+1}^i - 2u_k^i + u_{k-1}^i}{h^2} = f_k^i, \quad (2.22)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}.$$

Первое начальное условие (2.21) и краевые условия (2.22) на выбранной сетке удовлетворяются точно. Разностное уравнение (2.23) аппроксимирует уравнение (2.20) со вторым порядком по τ и h . Для того, чтобы не нарушать второго порядка аппроксимации задачи аппроксимируем $\partial u(x, 0)/\partial t$

$$u_k^1 - u_k^{-1} = 2\tau\psi_k, \quad k = \overline{0, M}.$$

Значение u_k^{-1} исключим с помощью разностного уравнения (2.22) при $i=0$:

$$u_k^1 - 2(1 - a^2\alpha^2)u_k^0 + u_k^{-1} - a^2\alpha^2(u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) = f_k^0,$$

$$u = u_k^1 - 2\psi_k, \quad k = \overline{0, M}.$$

Отсюда

$$2u_k^1 + 2(\alpha^2 a^2 - 1)u_k^0 - \alpha^2 a^2(u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0) = \tau^2 f_k^0 + 2\tau\psi_k.$$

Поскольку

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, M},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned}
& u_k^1 = \tau^2/2f_k^0 + \tau\psi_k + (1 - \alpha^2 a^2)\varphi_k + a^2 \alpha^2/2(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1}), \\
& u_k^{i+1} + 2(\alpha^2 a^2 - 1)u_k^i + u_k^{i-1} - \alpha^2 a^2(u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) = \tau^2 f_k^i \\
& k = \overline{1, M-1}; \quad i = \overline{1, N-1}; \\
& u_k^0 = \varphi_k; \quad k = \overline{0, M}; \quad u_0^i = \mu_i; \quad u_M^i = v_i; \quad i = \overline{0, N}
\end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Разностная схема (2.23) аппроксимирует задачу (2.19)-(2.21) со вторым порядком по τ и h . Для обеспечения устойчивости этой схемы, а, значит, сходимости ее решения к точному решению задачи, должно выполняться условие $r = \tau^2/h^2 < 0,5$.

Разностная схема может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned}
& u_k^{i+1} = 2(1 - \alpha^2 a^2)u_k^i + \alpha^2 a^2(u_{k+1}^i + u_{k-1}^i) - u_k^{i-1} + \tau^2 f_k^i, \\
& i = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{1, M-1}; \\
& u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, M}; \\
& u_k^1 = \tau^2/2f_k^0 + \tau\psi_k + (1 - \alpha^2 a^2)\varphi_k + \alpha^2 a^2/2(\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}); \\
& u_0^i = \mu_i; \quad u_M^i = v_i; \quad i = \overline{0, N}
\end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Разностная схема (2.24) позволяет последовательно найти $u_k^2, u_k^3, \dots, u_k^N$ через значения u_k^0, u_k^1 с учетом краевых условий $u_0^i = \mu_i, u_M^i = v_i$.

Неявные разностные схемы, а также решение двумерных задач не рассматриваем в виду громоздкости выкладок и получаемых зависимостей.

2.6 Моделирование случайных воздействий

Мы рассмотрели численные методы решения детерминированных математических моделей. Однако, как уже отмечалось раньше, если правая часть уравнения представляет собой случайную функцию, то такая математическая модель будет стохастической. При статистическом моделировании задача сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и

взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий внешней среды, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ. При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. На практике используются три основных способа генерации случайных чисел на ЭВМ: аппаратный (физический); табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

При аппаратном способе генерация случайных чисел осуществляется с помощью специальной приставки к ЭВМ, а в качестве физического эффекта, лежащего в основе этих генераторов, используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах и др. Недостатком такого способа, кроме необходимости иметь специальное устройство, является невозможность повторно получать при моделировании одинаковые последовательности чисел.

При табличном способе случайные числа, оформленные в виде таблицы и соответственно файла, помещают в оперативную или внешнюю память ЭВМ. Недостаток такого способа заключается в сокращении объема памяти ЭВМ.

Алгоритмический способ получения последовательностей случайных чисел основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. Это сводится к генерированию некоторых базовых процессов и к их последующему преобразованию. В качестве базового процесса чаще всего принимается генерирование случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$. Такое распределение имеет математическое ожидание $0,5$ и дисперсию $1/12$.

Наибольшее применение в практике моделирования на ЭВМ для генерации последовательностей псевдослучайных чисел находят алгоритмы вида

$$x_{i+1} = \phi(x_i),$$

представляющие собой рекуррентные соотношения первого порядка. Полученные числа называются псевдослучайными, так как, во – первых, на ЭВМ можно оперировать только конечным множеством чисел и нельзя получить идеальную последовательность случайных чисел. Во-вторых, для получения случайных чисел используются алгоритмы, составленные на базе детерминированных зависимостей.

Широкое применение при моделировании псевдослучайных чисел на ЭВМ получили конгруэнтные процедуры, представляющие собой арифметические операции, в основе которых лежит фундаментальное понятие конгруэнтности. Два целых числа α и β

конгруэнтны (сравнимы) по модулю m , где m - целое число, тогда и только тогда, когда существует такое целое число k , что $\alpha - \beta = km$, т.е. разность $\alpha - \beta$ делится на m и если числа α и β дают одинаковые остатки от деления на абсолютную величину числа m . Например, $1984 \equiv 4 \pmod{10}$, $5008 \equiv 8 \pmod{10^3}$ и т.д. Конгруэнтные процедуры являются чисто детерминированными, так как описываются в виде рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} \equiv \lambda x_i + \mu \pmod{M},$$

где x_{i+1}, λ, μ, M - неотрицательные целые числа.

Генератор случайных чисел должен удовлетворять определенным требованиям. Полученные с помощью идеального генератора псевдослучайные последовательности чисел должны: состоять из квазиравномерно распределенных чисел; содержать статистически независимые числа; быть воспроизводимыми; иметь неповторяющиеся числа; получаться с минимальными затратами машинного времени; занимать минимальный объем машинной памяти. Этим требованиям в полной мере отвечают конгруэнтные процедуры.

Теперь рассмотрим вопросы преобразования базового (равномерного) распределения случайных чисел.

Для получения дискретных случайных величин можно использовать метод обратной функции. Если ξ - равномерно распределенная на интервале $[0,1]$ случайная величина, то искомая случайная величина X получается с помощью преобразования

$$X = F_X^{-1}(\xi),$$

где F_X^{-1} - функция, обратная функции распределения вероятностей:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{j=1}^m p_j,$$

где p_j - вероятность того, что случайная величина X примет значение x_j .

Рассмотрим особенности генерации на ЭВМ непрерывных случайных величин. Пусть непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx,$$

где $f_x(x)$ - плотность распределения вероятностей.

Воспользуемся также методом обратной функции. Если случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $f_X(x)$, то распределение случайной величины

$$\xi = \int_0^X f_X(x) dx$$

является равномерным в интервале $[0,1]$. На основании этого можно сделать вывод: чтобы получить число, принадлежащее последовательности случайных чисел $\{x_j\}$, имеющих функцию плотности распределения вероятностей $f_x(x)$, необходимо разрешить относительно x_j уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_j} f_x(x) dx = \xi_j.$$

Рассмотрим некоторые примеры. Как мы говорили ранее, общий припуск поковки, получаемой методом свободнойковки, является случайной величиной, значения которой распределены по закону Вейбулла. Необходимо получить это распределение, используя случайную величину, равномерно распределенную в интервале $[0,1]$.

В силу последнего соотношения и зависимости для плотности распределения вероятностей применительно к закону Вейбулла

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \left(\frac{x-c}{a} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{x-c}{a} \right)^b \right] & \text{при } x \geq x_1, \\ 0, & \text{при } x < x_1, \end{cases}$$

получаем

$$\xi_i = \frac{b}{a} \int_c^{x_i} \left(\frac{x-c}{a} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{x-c}{a} \right)^b \right] dx = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x-c}{a} \right)^b \right],$$

где ξ_i - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$. Тогда, величина x_i , распределенная по закону Вейбулла,

$$x_i = c + a \sqrt[b]{-\ln(1-\xi_i)}.$$

Однако указанный метод имеет ограниченное применение. Он неприменим, например, в случае, когда интеграл от плотности распределения вероятностей не берется. Например, в случае нормального распределения случайной величины. В этом случае используют

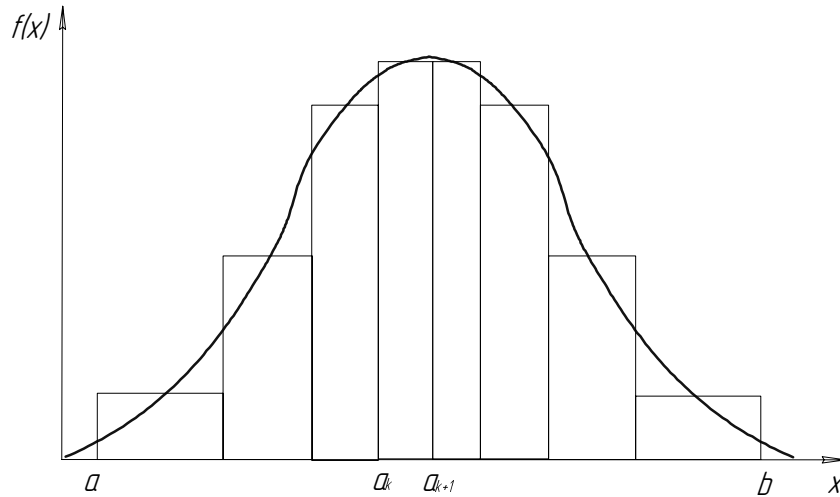


Рис. 2.13 - Кусочная аппроксимация функции плотности распределения вероятностей.

приближенный универсальный способ получения случайных чисел, основанный на кусочной аппроксимации функции плотности распределения вероятностей. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел $\{x_j\}$ с функцией плотности распределения вероятностей $f_X(x)$, возможные значения которой лежат в интервале $[a, b]$. Представим $f_X(x)$ в виде кусочно-постоянной функции, т.е. разобьем интервал $[a, b]$ на m интервалов, как показано на рис.2.13, и будем считать $f_X(x)$ на каждом интервале постоянной.

Тогда случайную величину X можно представить в виде $X = a_k + X_k^*$ где a_k - абсцисса левой границы k -го интервала ; X_k^* - случайная величина, возможные значения которой располагаются равномерно внутри k -го интервала, т.е. на каждом участке $[a_k, a_{k+1}]$ величина X_k^* считается распределенной равномерно. Чтобы аппроксимировать $f_X(x)$ наиболее удачным для практических целей способом, целесообразно разбить $[a, b]$ на интервалы так, чтобы вероятность попадания случайной величины X в любой интервал $[a_k, a_{k+1}]$ была постоянной, т.е. не зависела от номера интервала k . Таким образом, для вычисления a_k воспользуемся следующим соотношением

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_X(x) dx = 1/m.$$

Рассмотрим это на примере. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел $\{x_j\}$, имеющих нормальное распределение с математическим ожиданием a и среднеквадратичным отклонением σ :

$$f_x(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-0,5(x-a)^2\sigma^{-2}].$$

Будем формировать случайные числа x_j в виде сумм последовательностей случайных чисел $\{x_j\}$, имеющих равномерное распределение в интервале $[0,1]$. Так как базовой последовательностью случайных чисел $\{x_j\}$ при суммировании является последовательность чисел, имеющих равномерное распределение в интервале $[0,1]$, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой для одинаково распределенных случайных величин: если независимые одинаково распределенные случайные величины x_1, \dots, x_N имеют каждая математическое ожидание a_1 и среднеквадратичное отклонение σ_1 , то сумма $\sum_{i=1}^N x_i$ асимптотически нормальна с математическим ожиданием $a = Na_1$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sigma_1\sqrt{N}$.

Как показывают расчеты, сумма $\sum_{i=1}^N x_i$ имеет распределение, близкое к нормальному, уже при сравнительно небольших N . Практически для получения последовательности нормально распределенных случайных величин можно пользоваться значениями $N=8\dots 12$, а в простейших случаях и меньшими значениями N , например, $N=4\dots 5$.